大学数学立体化教材

线性代数

（经济类）

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材 线性代数（经济类）

大学数学立体化教材

线性代数

（经济类）

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数．经济类/吴赣昌主编．
北京：中国人民大学出版社，2006
大学数学立体化教材
ISBN 7-300-07131-7

Ⅰ．线…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 016229 号

大学数学立体化教材
线性代数（经济类）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北涿州星河印刷有限公司		
开　　本	720×965 毫米 1/16	版　　次	2006 年 4 月第 1 版
印　　张	16.25 插页 1	印　　次	2006 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	295 000	定　　价	32.00 元（含光盘）

内容简介

本书根据高等学校经济类专业线性代数课程的教学大纲及考研大纲编写而成。内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换等知识。书中融入了数学历史、数学文化的教育，教学例题的配备注意了学习难度的循序渐进，本书还选编了题型较为丰富的习题。附录中编入了与本书配套的数学实验指导。书后配有内容丰富、功能强大的《线性代数多媒体学习系统》（光盘），其内容涵盖了课堂教学、习题解答、实验教学、综合训练等模块。在教学过程中，将光盘与本书配合使用，形成了教与学的有机结合。本书可作为高等学校经济类专业的线性代数教材。

与书配套建设的《线性代数多媒体教学系统》（光盘）将随教材配送给教师。

总　序

1999年的暑假，经过近半年的调研和思考之后，笔者义无反顾地选择了“大学数学教育信息化研究”作为自己的一个中期研究目标，促使笔者作出这样的选择主要基于以下几点：

1. 教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向. 借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标.

2. 20世纪90年代以来，我国高等教育迅速从“精英型教育”向“大众化教育”转化，教育规模的迅速扩大，给我国大学教育带来了一系列的问题，例如，现阶段大学数学的教育正面临生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列似乎矛盾的问题.

3. 大学应以教学为中心，但长期以来，教学研究没有得到应有的重视，天女散花式的教研投入，造成国内高校在同一水平上的大量重复建设和浪费，而重点研究项目的投入又严重不足，难以为继.

4. 与其他学科的教育信息化研究相比，大学数学教育信息化的研究进展缓慢. 随着大众化教育阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要.

由针对上述问题的分析可见，如何将教育技术与信息技术相结合，针对所面临的问题建设一系列“新型教材”就有其非常的紧迫性. 在笔者的设想中，这种“新型教材”就是“教学资源库式的立体化教材”. 它至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教、学、考多层次、全方位的建设. 此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量、培养学生的数学应用与实践能力，利于学生的课后学习辅导和优秀学生的提高训练与考研训练，以及全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用. 基于这一设想和预期，笔者组织和带领一个团队，开始了大学数学立体化教材的研发工作.

大学数学立体化教材的研发工作迄今已历时6年，期间历经多次升级改版，从2001年起，先后被全国200多所高等院校采用或试用，形成了现在全新的“教学资源库式”的立体化教材——中国人民大学出版社推出的“大学数学立体化教材”，它包含两大类，共六册. 理工类：《高等数学》，《线性代数》与《概率论与数理统计》；经济类：《微积分》，《线性代数》与《概率论与数理统计》. 下面，笔者以其中

的一套来简单介绍该立体化教材的形式与内涵.

立体化教材的形式：

1.《 * * * * 》(书)

2.《 * * * * 多媒体学习系统》(光盘,学生专用)

与上述立体化教材配套建设的还有

3.《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘,教师专用)

(将随教材免费配送给教材采用单位的教师使用.)

《 * * * * 》(书)的编写具有下列特点：

● 书中融入了数学历史与数学文化的教育.

● 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思想.

● 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出了进一步的总结.

● 依循序渐进的原则,以适当的难度梯度选编了教学例题.

● 与教材同步配套,简明实用地编写了"大学数学实验指导". 该实验指导在按教学内容设计了相应的基础实验的基础上,还选择部分数学建模案例设计了部分综合实验.

《 * * * * 多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化的学习软件,其中设计了多媒体教案、习题详解、数学实验、题型分析、考研真题剖析等功能模块,内容包含从课程学习到考研提高的全部内容. 具体来说,其特点如下：

● 多媒体教案:按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画,直击数学思想本质.

● 习题详解:以动态解析方式给出了习题的求解过程,并逐题配备了相关知识点链接.

● 数学实验:以交互、集成方式,设计了数学实验教学演示系统和实验案例库.

● 题型分析:总结解题思路,并通过精选的例题揭示出解题的一般规律和技巧.

● 考研真题:收录历届数学考研真题,并逐题作了深入剖析.

《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘),除包含了《 * * * * 多媒体学习系统》的主要功能模块和特点之外,它还具有以下特点：

● 多媒体教案:教学过程设计更适合教师进行课堂教学,补充了类型丰富的教学例题供教师选用,增加了课堂练习环节.

● 教学备课系统:搜集并整理了大量的教学资源和备课元素,供教师修改选

用，便于充分展现各位老师的个性化授课特点.

● 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势.

● 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验演示.

同步建设的《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 20 000 余道，具有以下特点：

● 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

● 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，可通过人工调整按钮，方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

● 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

● 二次开发功能：用户可对系统进行试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令笔者欣慰的是，与当初启动这个项目的时候相比，大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境(从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设)和软硬件技术(从软件开发平台到计算机相关硬件技术)都已经成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师的教学个性化问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

作为一项长期的事业，笔者今后将长期致力于大学数学立体化教材的建设工作，不断跟踪教育技术和信息化技术的发展，并及时应用到有关课程的教材建设之中，逐年提升、精益求精. 同时，笔者还将通过中国人民大学出版社的网站(在主页中点击“大学数学”按钮进入“大学数学立体化教材服务网站”，或直接输入网址 http://www.math123.cn 进入该服务网站)提供各种相关教学服务，包括：各类最新建设或升级的立体化教材的介绍、各类系统软件的演示等，尤其是还会提供丰富的下载内容，如各类系统软件的最新演示版本，有关各门课程的备课系统与数学实验案例库的最新升级版本、教学大纲、教学日历等.

6 年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类)出版以来，笔者的工作得到了许多国内同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

吴赣昌

2006 年 3 月 1 日

目 录

附录　大学数学实验指导

习题答案

第1章 行 列 式

历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

定义 1 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列，由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中就是**“对角线法则”**. 如图 1-1-1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是， 二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

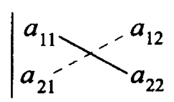

图 1-1-1

二、二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$(1.1)\times a_{22}-(1.2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{1.3}$$

$(1.2)\times a_{11}-(1.1)\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则由式 (1.3)、(1.4) 可改写为

$$\begin{cases} Dx_1=D_1 \\ Dx_2=D_2 \end{cases}$$

于是，在行列式 $D\neq 0$ 的条件下，式 (1.1)、(1.2) 有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注：从形式上看，这里分母 D 是由方程组 (1.1)、(1.2) 的系数所确定的二阶行列式（称为**系数行列式**），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性. 请读者学习时注意比较.

例1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1-2x_2=-3 \end{cases}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-14,$$

因 $D\neq 0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

三、三阶行列式

定义2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之

积再冠以正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”(见图1-1-2) 或“沙路法则”(见图1-1-3) 来表述之.

(1) 对角线法则

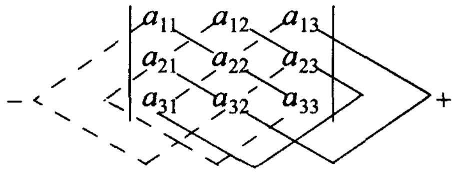

图 1-1-2

(2) 沙路法则

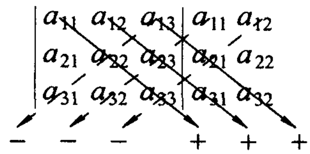

图 1-1-3

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} &= 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0 \\ &\qquad -3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6 \\ &= -10-48=-58.\end{aligned}$$

例 3 求解方程 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 方程左端

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例4 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

解 注意到系数行列式

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\quad -1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1) \\ &=-5\neq 0, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(8) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

3. 证明下列等式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

4. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

§1.2　n 阶行列式

一、排列与逆序

定义 1　由自然数 1, 2, …, n 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 **n 级排列**（简称为**排列**）.

例如，1234 和 4312 都是 4 级排列，而 24315 是一个 5 级排列.

定义 2　在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_t\,(t=1, 2, \cdots, n)$ 大的且排在 i_t 前面的数有共有 t_i 个，则 i_t 的逆序的个数为 t_i，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

例 1　计算排列 32514 的逆序数.

解　因为 3 排在首位，故其逆序数为 0；

在 2 前面且比 2 大的数有一个，故其逆序的个数为 1；

在 5 前面且比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 前面且比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

将上述结果排成如下形式

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514)=0+1+0+3+1=5.$$

定义 3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 类似例 1 的讨论，可排出下表：

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{排列} & n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
t_i & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1
\end{array}$$

则所求逆序数为：

$$N(n(n-1)\cdots321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易见：当 $n=4k, 4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2, 4k+3$ 时，该排列是奇排列.

二、n 阶行列式的定义

观察三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见：

(1) 三阶行列式共有 $6=3!$ 项；

(2) 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积；

(3) 每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 4 由 n^2 个元素 $a_{ij}\ (i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然

顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号；是奇排列则取负号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和．行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**．

注：(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项（不包括元素本身所带的符号）各占一半．因此，行列式实质上是一种特殊定义的数；

(2) $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$（不包括元素本身所带的符号）；

(3) 一阶行列式 $|a| = a$，不要与绝对值记号相混淆．

例 3 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$，现考察不为零的项．$a_{1j_1}$ 取自第一行，但只有 $a_{14} \neq 0$，故只可能 $j_1 = 4$；同理可得 $j_2 = 3$，$j_3 = 2$，$j_4 = 1$．即行列式中不为零的项只有 $(-1)^{N(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$，所以

$$D = 24.$$

注：一般地，可得到下列结果：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}.$$

例 3 中行列式，其非副对角线上元素全为 0，此类行列式可以直接求出结果．特别地，非主对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**，而对角线以下（上）的元素全为 0 的行列式称为**上（下）三角（形）行列式**．

例 4 计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$(a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0)$.

解 一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项．$a_{nj_n}$ 取自第 n

行，但只有$a_{nn}\neq 0$，故只可能取$j_n=n$；$a_{n-1\,j_{n-1}}$取自第$n-1$行，只有$a_{n-1\,n-1}$及$a_{n-1\,n}$不为零，因a_{nn}取自第n列，故$a_{n-1\,j_{n-1}}$不能取自第n列，从而$j_{n-1}=n-1$；同理可得，$j_{n-2}=n-2$，$\cdots$，$j_1=1$. 所以不为零的项只有

$$(-1)^{N(1,2,\cdots,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

故
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注：类似可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三、对换

为进一步研究n阶行列式的性质，先要讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系.

定义5 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续称为**对换**. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如，对换排列21354中元素1和4的位置后，得到排列24351.

定理1 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换$a$与$b$，变为$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然，$a_1\cdots a_l$，$b_1\cdots b_m$这些元素的逆序数经过对换并不改变，而$a$, b两元素的逆序数改变为：

当$a<b$时，经对换后a的逆序数增加1而b的逆序数不变；

当$a>b$时，经对换后a的逆序数不变而b的逆序数减少1.

所以排列$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$与排列$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$的奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列为$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对它做$m$次相邻对换，变成排列$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再做$m+1$次相邻对换，变成$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，总之，经$2m+1$次相邻对换，排列$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$变成排列$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性改变.