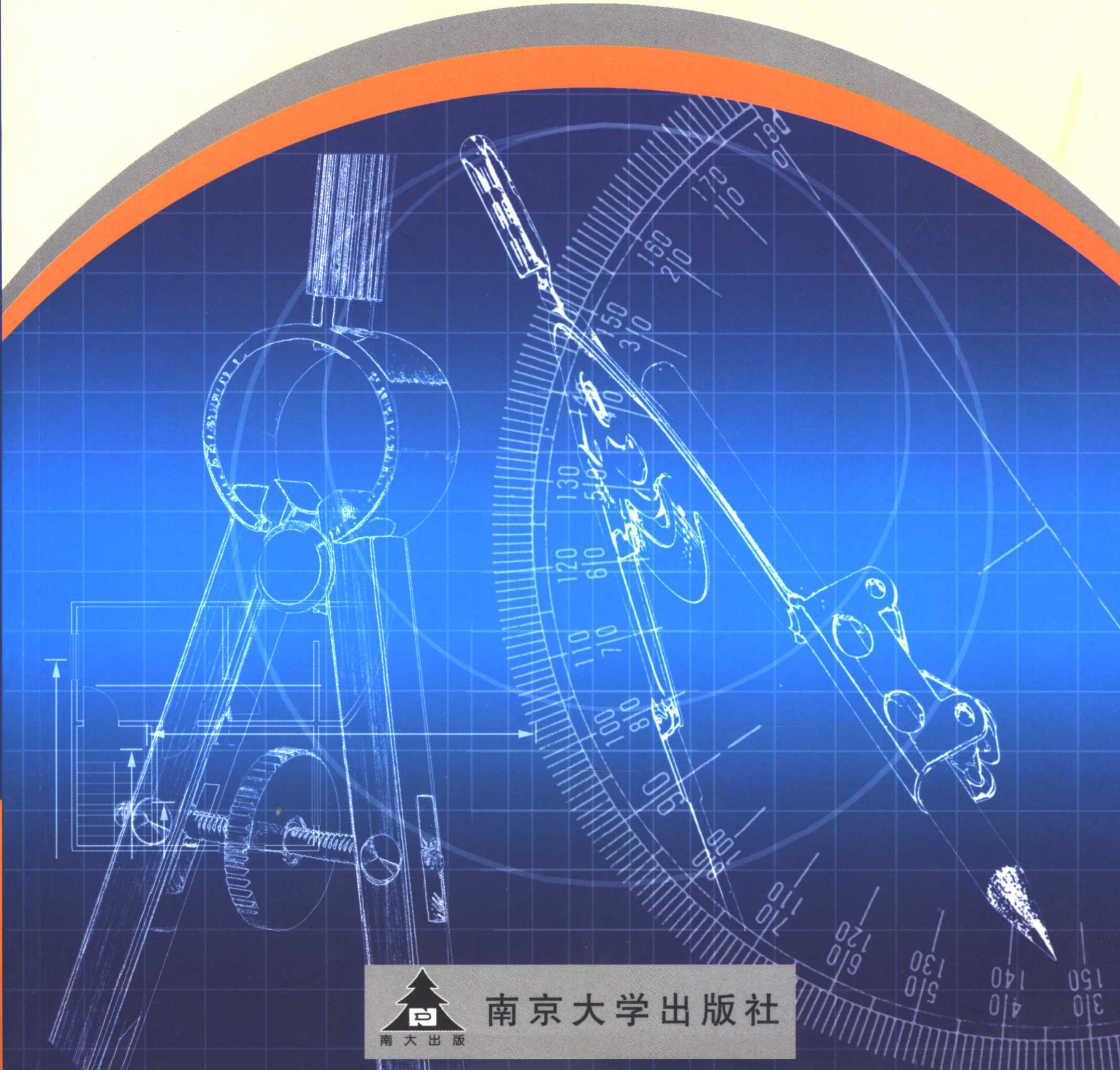
全国高等职业教育规划教材

# 大学数学

主编 胡炳生



南京大学出版社

全国高等职业教育规划教材

# 大学数学

主 编 胡炳生
编 者 叶迎春 葛云飞 王 渊

南京大学出版社

内容简介

本书由分析学(一元微积分、多元微积分、常微分方程和差分方程)、线性代数(行列式、矩阵、线性方程组)、概率统计和数学建模(包括数学实验)四个模块共十章组成.各章都有较多的数学应用实例,内容涵盖了高职、高专和一般大学非数学专业对于高等数学教学的需求.每个模块分为基本要求和提高要求(加 * 号)两部分,每一章习题也分A、B两组,富有较大的弹性,可供72~120学时不同专业的高等数学课程选用.

**图书在版编目(CIP)数据**

大学数学/胡炳生主编.—南京:南京大学出版社,2005.9
全国高等职业教育规划教材
ISBN 7-305-04554-3

Ⅰ.大... Ⅱ.胡... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第107206号

书　　名　**大学数学**
主　　编　胡炳生
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　邮编 210093
电　　话　025-83596923　025-83592317　传真 025-83328362
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子函件　nupress1@public1.ptt.js.cn
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　合肥学苑印务公司
开　　本　787×1092(mm) 1/16　印张:23.25　字数:530千
版　　次　2005年9月第1版　2005年9月第1次印刷
书　　号　ISBN　7-305-04554-3/O·365
定　　价　29.00元

# 前　言

现代数学的发展，特别是计算机技术的应用，促进了科学技术的迅速发展；而现代科学技术的发展，也越来越需要数学的帮助.现代数学，已经不仅是指导人们进行精确数量分析、复杂计算和问题解决的知识和理论，而且它本身已经成为一门技术——数学技术.所谓“高新技术”，其核心就是这种数学技术.

如果说半个世纪前还只有自然科学需要数学的话，那么，现在自然科学和社会科学的各个学科，社会生产和社会生活的各个门类，都离不开数学的知识、理论和技术，都离不开计算机的运用；而计算机，是“数学的心脏加上机械的外壳”，因此它也是数学技术的一种载体.

所以，数学是一切科学技术的基础；数学课程是高等学校、尤其是理工科和技术学科的各个专业共同的基础课程.不仅如此，文科和社会学科专业，也纷纷开设高等数学课程.

为了适应当前人才市场的需求，近几年来，我国高等职业技术学院（高职）和高等专科学校（高专）发展很快，所设的学科和专业越来越多，但它们有一个共同的特点，就是都需要开设高等数学课程.然而，以前所出的高等数学教材，主要是针对普通大学理工科编写的，注重高等数学理论的系统性和逻辑性，理论联系实际较少，特别是联系高职、高专专业技术的实际知识和技能较少，所以很少有适合这些学校选用的高等数学专门教材.

目前我国高职、高专对高等数学有什么特殊的要求呢？

（1）要具有较强的应用性和技术性，能够将高等数学与所学的专业技术相结合；

（2）需要有较大的弹性，能够适应高职、高专的各个专业对高等数学的需求；

（3）要考虑到高职、高专部分学生参加“专升本”考试的需要.

本书就是按照这样的要求编写的.

首先，它内容取材广泛，涵盖了高职、高专大多数专业对于高等数学教学的需要.全书由四个模块组成：分析学（包括一元微积分、多元微积分、常微分方程和差分方程）、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组）、概率统计和数学建模（包括数学试验）.方便各个专业选用.

其次，注重高等数学理论与实际的联系，注重数学知识多方面的应用.在每章、每节中，特别是在第十章中，集中介绍数学在各个技术领域中的应用，提供大量有实际应用背景的例题和问题解决.

再次，在教学要求上有较大的弹性．每个模块都有基本要求和提高要求（加“＊”号）两部分，每节有练习题，每章有A、B两组习题．除了提供教学的教材（A组）以外，还为准备升学的学生提供进一步学习的必要材料（B组）．

本书编者都是在高等学校从事高等数学教学多年的专家学者，以及正在从事高职、高专高等数学教学的在线教师，书中包含了他们的教学经验．但因时间和个人认识的限制，书中难免会有缺点、错误，希望读者给予批评与指正，以便在今后再版时改正．

编者

2005年7月

# 目　　录

# 第一章　函数、极限与连续

函数是微积分学研究的主要对象,极限是微积分学研究的基本工具,导数与微分是微积分学的重要组成部分.本章在总结中学已有知识(函数、极限与导数)的基础上,补充介绍微积分的重要概念——无穷大量与无穷小量,函数的连续性及微分,进一步讨论导数与微分的基本求导公式和运算法则、常见未定型极限的计算等后续学习所必需的知识.

## 第一节　函　　数

### 一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

在 17 世纪之前,函数的概念一直与公式紧密关联. 到了 1873 年,德国数学家狄利克雷(1805—1859)抽象出了至今仍为人们易于接受,并且较为合理的函数概念.

**定义 1.1**　设在某一变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$,如果当变量 $x$ 在实数的某一范围 $D$ 内,任意取一定数值时,变量 $y$ 按照某种对应法则 $f$,有惟一确定的值与之对应,则称 $y$ 是 $x$ 的函数,记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中变量 $x$ 称为自变量,变量 $y$ 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 $D$ 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应法则 $f$,函数 $y$ 有惟一确定的值 $y_0$ 与之相对应,则称 $y_0$ 为 $y = f(x)$ 在 $x_0$ 处的函数值,记作

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y\big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

全体函数值的集合,称为函数的值域.

函数的表示方法一般有解析法、表格法、图像法. 在研究函数时,一定要考虑它的定义域. 当函数用解析法表示时,求函数的定义域的原则是使函数表达式有意义. 因此,要求:

(1) 分式,分母必须不等于零;

(2) 偶次根式,被开方式必须大于等于 0;

(3) 对数,真数必须大于零,底大于零且不等于 1;

(4) 正切符号下的式子必须不等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$,余切符号下的式子必须不等于 $k\pi(k \in \mathbf{Z})$;

(5) 反正弦符号下的式子的绝对值必须小于等于1,反余弦符号下的式子的绝对值必须小于等于1;

(6) 表达式中同时有以上几种情况,需同时考虑,并求它们的交集;

(7) 在不同的范围内是不同的解析式表示的函数称为分段函数,如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数. 分段函数的定义域为自变量取值集合的并集.

**例1** 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-16}$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$;

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{1+x}{2}$.

**解** (1) 因为 $x^2-16\geq 0$,解得 $x\geq 4$ 或 $x\leq -4$,所以此函数定义域为 $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

(2) 因为 $\begin{cases}3-x>0\\ 2x+4>0\end{cases}$,即 $\begin{cases}x<3\\ x>-2\end{cases}$,所以函数定义域为 $(-2,3)$.

(3) 因为 $-1\leq\dfrac{1+x}{2}\leq 1$,即 $-3\leq x\leq 1$,所以函数定义域为 $[-3,1]$.

**例2** 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ 3, x<0\end{cases}$ 的定义域,并作函数的草图.

**解** 分段函数的定义域为各段自变量取值集合的并集,所以此函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,其图形如图1-1所示.

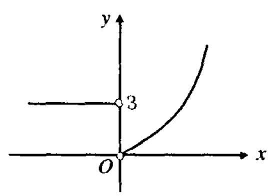


图1-1

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义. 一般来说,经济变量往往取正值.

在讨论函数时,经常用到邻域概念. 我们称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域,简称点 $x_0$ 的邻域. $\delta$ 为正数,称为邻域的半径.

**例3** 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,求 $f(2)$, $f(a)$, $f(x+1)$, $f(-\dfrac{1}{x})$.

**解** $f(2)=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$;

$$f(a)=\frac{1}{1+a^2};$$

$$f(x+1)=\frac{1}{1+(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2};$$

$$f(-\frac{1}{x})=\frac{1}{1+(-\frac{1}{x})^2}=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

函数的定义域、对应法则、值域称为函数的三要素. 当两个函数的定义域与对应法则一

致时,这两个函数表示的是同一个函数. 例如,$f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$,它们的定义域与对应法则一致,只是表示形式不同而已,实际是同一个函数.

2. 函数的性质

1) 函数的奇偶性

**定义 1.2** 设函数 $y = f(x)$ 在 $D$ 上有定义,如果对于任意的 $x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$,则称 $y = f(x)$ 为偶函数;如果对于任意的 $x \in D$,有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $y = f(x)$ 为奇函数.

由定义 1.2 知,奇、偶函数的定义域 $D$ 关于原点对称;在平面直角坐标系中,偶函数的图形关于 $y$ 轴对称(见图 1-2);奇函数的图形关于原点对称(见图 1-3).

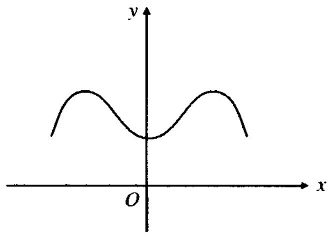



图 1-2

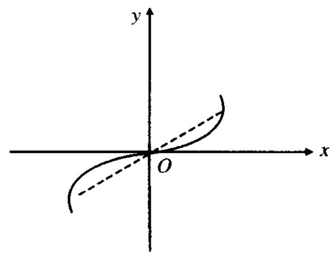



图 1-3

**例 4** 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$;

(2) $f(x) = 4x + \cos x$;

(3) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$.

**解** (1) 因为 $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 5 = x^4 - 3x^2 + 5 = f(x)$,所以 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = 4(-x) + \cos(-x) = -4x + \cos x \neq f(x)$,且 $f(-x) \neq -f(x)$,所以 $f(x) = 4x + \cos x$ 既非奇函数,也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \dfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -f(x)$,所以 $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$ 是奇函数.

2) 函数的单调性

**定义 1.3** 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内有定义,如果对于 $(a,b)$ 内的任意两点 $x_1$ 和 $x_2$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $y = f(x)$ 在 $(a,b)$ 内是单调增加的(见图 1-4),$(a,b)$ 称为 $f(x)$ 的单调增区间;如果对于 $(a,b)$ 内的任意两点 $x_1$ 和 $x_2$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $y = f(x)$ 在 $(a,b)$ 内是单调减少的(见图 1-5),$(a,b)$ 称为 $f(x)$ 的单调减区间.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数,所对应的区间称为单调区间.

例如,函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的;$[0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 分别为函数 $y = x^2$ 的单调增区间与单调减区间.

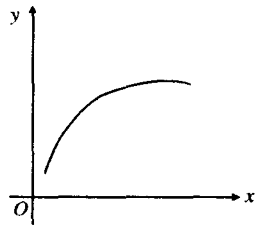


图 1－4

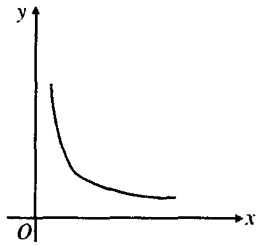


图 1－5

3）函数的周期性

**定义** 1.4　对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的实数 $T$，对于每一个 $x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是周期函数，$T$ 称为 $f(x)$ 的一个周期. 周期函数的周期有无穷多个，我们通常所说函数的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

4）函数的有界性

**定义** 1.5　设函数 $y=f(x)$ 在集合 $D$ 上有定义，如果存在一个正数 $M$，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上是有界的.

有界函数的图像 $y=f(x)$ 必介于两条平行于 $x$ 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间（见图 1－6）.

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等都是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数.

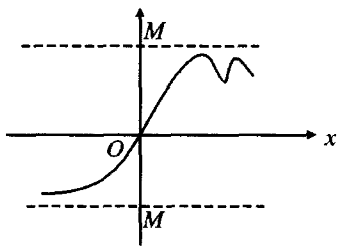


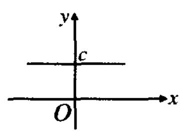
图 1－6

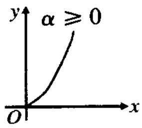
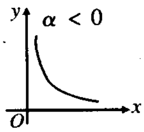
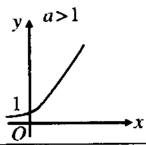
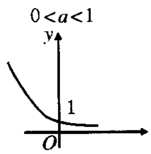
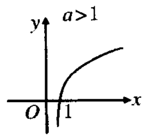
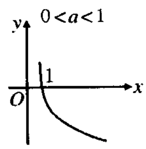
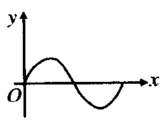
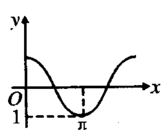
3. 初等函数

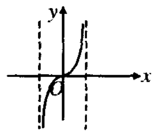
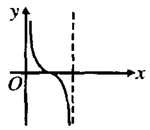
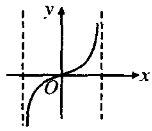
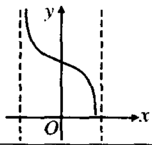
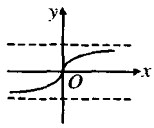
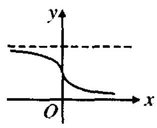
1）基本初等函数

我们在中学里学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数，其主要性质与图像如表 1－1 所示.

**表 1－1　基本初等函数**

| 名称 | 表达式 | 定义域 | 图像 | 性质 |
|---|---|---|---|---|
| 常数函数 | $y=c$<br>（$c$ 为常数） | $(-\infty,+\infty)$ |  | (1) 偶函数；<br>(2) 有界. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | $y=x^{\alpha}$<br>（$\alpha$ 为任意实数） | 根据 $\alpha$ 值的不同，$y=x^{\alpha}$ 的定义域也不同 |  | (1) 图像都过(0,0) 和(1,1) 点；<br>(2) 在[0, +∞) 内单调增加. |
| | | |  | (1) 图像都过(1,1) 点；<br>(2) 在(0, +∞) 内单调减少. |
| 指数函数 | $y=a^{x}$<br>$(a>0,a\neq1)$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | (1) 图像均在 $x$ 轴上方；<br>(2) 图像均过(0,1) 点；<br>(3) 单调增加. |
| | | |  | 1. 图像均在 $x$ 轴上方；<br>2. 图像均过(0,1) 点；<br>3. 单调减少. |
| 对数函数 | $y=\log_a x$<br>$(a>0,a\neq1)$ | $(0,+\infty)$ |  | (1) 图像均在 $y$ 轴右侧；<br>(2) 图像均过(1,0) 点；<br>(3) 单调增加. |
| | | |  | (1) 图像均在 $y$ 轴右侧；<br>(2) 图像均过(1,0) 点；<br>(3) 单调减少. |
| 正弦函数 | $y=\sin x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | (1) 奇函数；<br>(2) 周期 $T=2\pi$；<br>(3) 有界；<br>(4) 在区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$$(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加；在区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$$(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少. |
| 余弦函数 | $y=\cos x$ | $(-\infty,+\infty)$ |  | (1) 偶函数；<br>(2) 周期 $T=2\pi$；<br>(3) 有界；<br>(4) 在区间 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$$(k\in\mathbf{Z})$ 上单调增加；在区间$[2k\pi,(2k+1)\pi]$$(k\in\mathbf{Z})$ 上单调减少. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 正切函数 | $y = \tan x$ | $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ |  | (1) 奇函数;<br>(2) 周期 $T = \pi$;<br>(3) 在区间$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(k \in \mathbf{Z})$ 上单调增加. |
| 余切函数 | $y = \cot x$ | $\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ |  | (1) 奇函数;<br>(2) 周期 $T = \pi$;<br>(3) 在区间$(k\pi, (k+1)\pi)$, $(k \in \mathbf{Z})$ 上单调减少. |
| 反正弦函数 | $y = \arcsin x$ | $[-1,1]$ |  | (1) 奇函数;<br>(2) 单调增加. |
| 反余弦函数 | $y = \arccos x$ | $[-1,1]$ |  | 单调减少. |
| 反正切函数 | $y = \arctan x$ | $(-\infty, +\infty)$ |  | (1) 奇函数;<br>(2) 有界;<br>(3) 单调增加. |
| 反余切函数 | $y = \operatorname{arccot} x$ | $(-\infty, +\infty)$ |  | (1) 有界;<br>(2) 单调减少. |

2）复合函数

对于函数 $y = \sqrt{x^2 + 1}$,我们可以将它看作是把 $u = x^2 + 1$ 代入到 $y = \sqrt{u}$ 中而得到的,像这样在一定条件下,将一个函数“代入”到另一个函数中去,称之为这两个函数的“复合”.

**定义 1.6**　设 $y$ 是 $u$ 的函数 $y = f(u)$, $u$ 又是 $x$ 的函数 $u = \varphi(x)$,如果对于自变量 $x$ 的取值,通过 $u$ 有惟一的 $y$ 与之对应,则 $y$ 通过变量 $u$ 构成 $x$ 函数,称 $y$ 为 $x$ 的复合函数,记作

$$y = f[\varphi(x)],$$

其中 $u$ 称为中间变量.

例如,由函数 $y = \cos u$, $u = x^2$ 构成了复合函数 $y = \cos x^2$.

必须注意的是:不是任意两个函数都可以构成一个复合函数的.要构成复合函数,至少函数 $u = \varphi(x)$ 值域的全部必须包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域中.例如, $y = \arcsin u, u \in [-1,1]$ 和 $u = 5 + x^2, x \in (-\infty, +\infty)$ 就不能复合.这是因为对于 $u = 5 + x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何值 $x$ 所对应的 $u$ 值都大于或等于5,于是 $y = \arcsin(x^2 + 5)$ 是没有意义的.

**例 5**　已知 $y = e^u$, $u = 1 + x^2$,将 $y$ 表示成 $x$ 的函数.

**解**　由于 $y = e^u$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $u = 1 + x^2$ 的值域为 $[1, +\infty)$,所以将 $u =$

$1+x^2$ 代入 $y=e^u$ 得它们组成的复合函数 $y=e^{1+x^2}$.

两个以上的函数也可以构成复合函数,如函数 $y=u^2, u=\sin v, v=\sqrt{x}$,它们构成了复合函数 $y=\sin^2\sqrt{x}$. 再如 $y=\tan(\ln\frac{x}{2})$ 是由 $y=\tan u, u=\ln v, v=\frac{x}{2}$ 复合而成的.

**例 6** 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\sin(5x+4)$;

(2) $y=e^{\tan x}$;

(3) $y=\ln\sqrt{\ln x}$;

(4) $y=\sqrt{\operatorname{arccot}(x+1)}$.

**解** (1) 函数 $y=\sin(5x+4)$ 是由 $y=\sin u, u=5x+4$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=e^{\tan x}$ 是由 $y=e^u, u=\tan x$ 复合而成的.

(3) 函数 $y=\ln\sqrt{\ln x}$ 是由 $y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=\ln x$ 复合而成的.

(4) 函数 $y=\sqrt{\operatorname{arccot}(x+1)}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\operatorname{arccot} v, v=x+1$ 复合而成的.

3) 反函数

**定义 1.7** 设给定 $y$ 是 $x$ 的函数 $y=f(x)$,若把 $y$ 看成自变量,$x$ 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为

$$y=f^{-1}(x),$$

称 $y=f(x)$ 为直接函数.

函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域,函数和它的反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

单调函数一定有反函数,且函数与其反函数有相同的单调性.

**例 7** 求函数 $y=\frac{x+2}{x-2}$ 的反函数.

**解** 由函数 $y=\frac{x+2}{x-2}$ 得

$$x=\frac{2(y+1)}{y-1},$$

将自变量 $y$ 改写成 $x$,因变量 $x$ 改写成 $y$,得到给定函数的反函数为

$$y=\frac{2(x+1)}{x-1}.$$

其定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成,并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

高等数学中讨论的函数绝大部分都是初等函数. 例如,函数 $y=\sin x^2$, $y=\frac{5x+2}{x^2+2x+1}$, $y=\sqrt{x}-\ln 2x$ 等都是初等函数.

## 二、函数应用举例

在社会经济活动和生产实践中,往往会涉及到一些变量,它们之间有着各种依存关系.

用数学方法解决实际问题时，就要找出这些变量之间的函数关系，建立数学模型. 下面我们介绍一些常见的函数模型.

1. 面积问题

**例 8** 已知一有盖的圆柱形铁桶容积为 $V$，试建立圆柱形铁桶的表面积 $S$ 与底面半径 $r$ 之间的关系.

**解** 设桶高为 $h$，由题意知

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

又

$$V = \pi r^2 h,$$

得

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

故圆柱形铁桶的表面积 $S$ 与底面积半径 $r$ 之间的关系为

$$S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \quad (0 < r < +\infty).$$

2. 体积问题

**例 9** 将一个底面半径为 2 cm，高为 10 cm 的圆锥形杯做成量杯，要在上面刻上表示容积的刻度，求出溶液高度与对应容积之间的函数关系.

**解** 设溶液高度为 $h$，其对应的容积为 $V$，$r$ 是平行于底面的截面的半径，如图 1 - 7 所示，则

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

注意到 $\Delta ABC \sim \Delta DEC$，有

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB},$$

即 $\frac{h}{10} = \frac{r}{2}$，得 $r = \frac{1}{5}h$，因此有

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{5}h\right)^2 h = \frac{1}{75}\pi h^3 \quad (0 \leqslant h \leqslant 10).$$

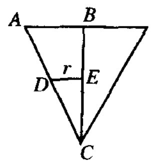


图 1 - 7

3. 需求函数与供给函数问题

在研究市场问题时，常常会涉及两个重要的函数，即需求函数和供给函数.

市场对某种商品的需求量 $Q$，主要受到该商品的价格的影响，通常降低商品的价格会使需求量增加，提高商品的价格会使需求量减少. 在假定其他因素不变的条件下，市场需求量 $Q$ 可视为该商品价格 $p$ 的函数，称为需求函数，记作

$$Q = Q(p).$$

供给是与需求相对应的概念，需求是就市场中的消费者而言，供给是就市场中的生产销售者而言的. 某种商品的市场供给量 $S$ 也受商品价格 $p$ 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少. 在假定其他因素不变的条件下，供给量 $S$ 也可看成价格 $p$ 的函数，称为供给函数，记作

$$S = S(p).$$

常见的需求函数和供给函数有线性函数、二次函数、指数函数等. 一般地,需求函数是价格的单调减函数,供给函数是价格的单调增函数. 当市场的需求量与供给量持平时,称为供需平衡. 此时的价格称为供需平衡价格或均衡价格,记为 $p_0$;需求量称为均衡量,记为 $Q_0$.

**例 10** 市场调查显示,某商品当售价为每件 70 元时,市场需求量为 1 万件,若该商品每件降低 3 元时,需求量将增加 0.3 万件,试求该商品的需求函数.

**解** 由题意知

$$Q = 1 + \frac{70 - p}{3} \times 0.3 = 8 - 0.1p.$$

**例 11** 上例中,当市场售价为每件 70 元时,生产厂商愿向市场提供 4 万件商品,当价格每件增加 3 元时,生产厂商就多提供 0.6 万件商品,试求该商品的供给函数.

**解** 由题意知

$$S = 4 + \frac{p - 70}{3} \times 0.6 = 0.2p - 10.$$

**例 12** 试求出上两例中该商品的市场均衡价格与均衡量.

**解** 当 $S = Q$ 时,市场供需平衡,此时

$$0.2p_0 - 10 = 8 - 0.1p_0,$$
$$p_0 = 60.$$

因而

$$Q_0 = 8 - 0.1 \times 60 = 2,$$

即市场的均衡价格为每件 60 元,均衡量为 2 万件.

4. 收入和利润函数问题

在生产和产品的经营活动中,人们总希望尽可能降低成本,提高收入和增加利润. 而成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量或销售量 $q$ 密切相关,它们都可以看作 $q$ 的函数,我们分别称为总成本函数,记作 $C(q)$;总收入函数,记作 $R(q)$;总利润函数,记作 $L(q)$.

总成本由固定成本 $C_1$ 和变动成本 $C_2(q)$ 两部分组成,固定成本与产量 $q$ 无关,如厂房、设备费等;变动成本随产量 $q$ 的增加而增加,如原材料费、劳动力费等.

$$\text{总成本函数 } C(q) = C_1 + C_2(q).$$

总收入函数是产品的单价与产量或销售量的积.

$$\text{总收入函数 } R(q) = pq \text{（其中 } p \text{ 为产品的单位售价）}.$$

总利润是总收入与总成本之差.

$$\text{总利润函数 } L(q) = R(q) - C(q).$$

**例 13** 某企业生产某种产品的日固定成本为 300 元,生产一个单位产品的变动成本为 250 元,试求该企业日总成本函数. 若每件产品的出厂价为 400 元,试问每天生产多少件产品才能达到收支平衡?

**解** 设该产品的日产量为 $q$ 个单位. 由题意,日总成本函数为

$$C(q) = C_1 + C_2(q) = 300 + 250q,$$

出售这 $q$ 单位产品所得总收入为

$$R(q) = pq = 400q,$$

因此，总利润为

$$L(q) = R(q) - C(q) = 150q - 300.$$

为达到收支平衡，必须 $L(q) = 0$，即

$$q = 2.$$

也就是说每天生产 2 个单位该产品，才可达到收支平衡.

5. 库存函数问题

**例 14** 某超市常年经销一种日用品，年销售量500箱，每箱进货价1 000元. 粗略地认为按平均库存量占用资金，此项资金每年应付贷款利息 8.5%，为了保证供应，要有计划地进货，又假设销售量是均匀的，卖完一批再进一批货，因此每批进货量相同. 已知进一批货需手续费 50 元，而库存保管费每箱每年 10 元，试求库存总费用 $C$ 与进货批量（即每批进货的数量）$x$ 之间的函数关系.

**解** 设进货批量为 $x$（箱），则全年进货的批数为

$$n = \frac{500}{x}.$$

按题意，进货的手续费

$$C_1 = 50n = \frac{25\ 000}{x},$$

平均库存量为

$$\frac{x}{2}.$$

从而库存保管费

$$C_2 = \frac{x}{2} \cdot 10 = 5x.$$

按这样的平均库存量，某超市常年占用资金大体为

$$\frac{x}{2} \cdot 1\ 000 = 500x.$$

为此支付贷款利息

$$C_3 = 500x \cdot 8.5\% = \frac{85}{2}x.$$

综上所述，库存总费用

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{25\ 000}{x} + \frac{95}{2}x.$$

6. 金融数理分析问题

金融数理分析的基础知识包括资金的时间价值和风险概念. 利息是资金的时间价值的一种表现形式. 利息又分为单利和复利，若本金在上期产生的利息不再加入本期本金计算利息，就叫单利；反之，若本金在上期产生的利息也纳入本期本金计算利息，就叫复利. 常见的金融数理模型有单利模型、复利模型、按揭模型、证券模型和证券价格的评估模型等.

**例 15（复利模型）** 设 $p$ 是本金，$r$ 为年复利率，$n$ 是计息年数，若每满 $\frac{1}{t}$ 年计息一次，求本利和 $A$ 与计息年数 $n$ 的函数模型.