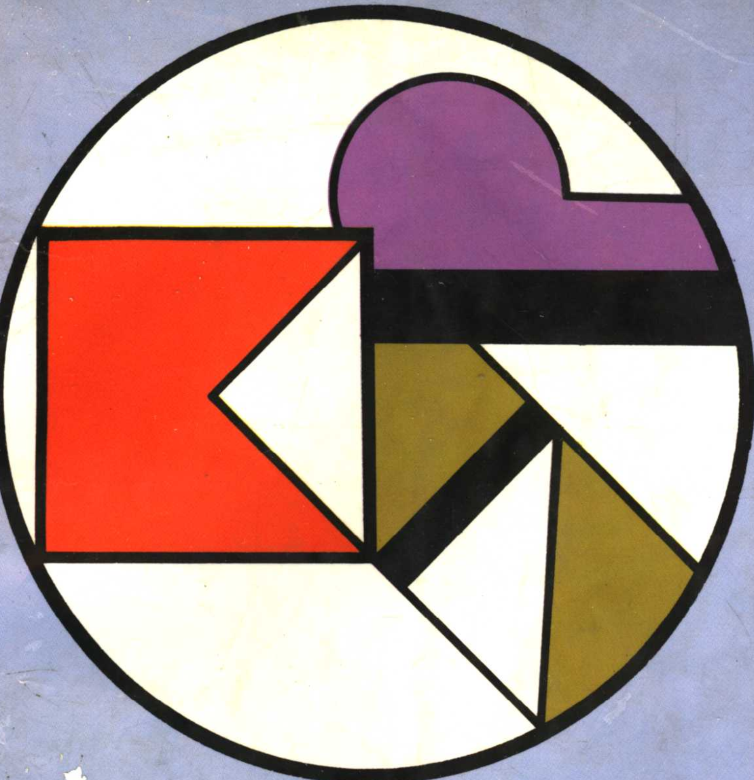

● 初中数理化解题技巧丛书

初中数学解题技巧

陈汝作　钱耀邦　编著

東方出版中心

初中数学解题技巧

陈汝作　钱耀邦　编著

说　明

经中央机构编制委员会办公室和中华人民共和国新闻出版署批准，原中国大百科全书出版社上海分社、知识出版社(沪)，自1996年1月1日起，更名为东方出版中心。

初中数学解题技巧　　陈汝作　钱耀邦　编著

出版：东方出版中心
(上海仙霞路335号·200335)
发行：东方出版中心
经销：新华书店上海发行所
印刷：昆山市亭林印刷总厂印刷
开本：787×1092(毫米)1/32
印张：10
字数：210千字
版次：1995年1月第1版
1998年1月第4次印刷
印数：38,001—43,000

ISBN 7-80627-080-9/G·26　　定价：10.00元

前　言

学会解题是学习数学的一个重要方面。熟练掌握数学的基础知识和基本技能是能否顺利解题的基础，深刻理解数学的基本方法、基本思路是能否顺利解题的关键。因此，一个人解题能力的强弱从某种程度上说也确实是比较客观地反映了他掌握基础知识和基本技能的水平，反映了他理解、掌握和熟练应用知识的能力，反映了他分析问题、解决问题的能力。正是这一点，到目前为止的各类及格考试、选拔考试乃至数学竞赛都仍然以应试者解题的成绩来衡量其所具数学水平的高低。

但是，解题又是有一定技巧的，如果能掌握一定的技巧就能达到事半功倍的目的，既能比较迅速地找到解题思路，又能比较简捷地作出解答。因此，我们编著这本书的目的，就是希望它能为广大读者在灵活运用基础知识，开拓解题思路，提高解题能力方面提供某些帮助和启发，为广大青少年成才尽我们的绵薄之力。对于数学教师，尤其是初中毕业班的任课教师来说，希望这本小册子也能为他们的教学研究、阶段复习提供一些素材和帮助，为开设课外讲座提供一些方便。

本书在编写时采用了专题的形式，每一专题都独立成文、自成一篇。因此，读者可根据自己的需要，选择其中某几篇先读。为了帮助读者能加深理解文内的某些解题思路和解题方法，每篇后又都备有习题若干，以供练习之用。凡计算题、选择

题等书末都附有参考答案，以备读者查考。在考虑本书的选材时，我们首先是以不超纲为基本要求，即仍以初中教材所要求的、初中学生可接受的为出发点，凡涉及高中阶段的知识、方法都一律不予介绍。同时，为了防止追求知识上的面面俱到而冲淡了本书着力于“解题技巧”这一特色，所以凡是课本上有的，或从技巧上讲觉得“无多少话可讲”的内容就都从略了。因此，现在本书上所有的可说都是集我们两人从教数十年的体会，是有感而发的，这一点是要特别加以说明的。

本书与前此也是由上海知识出版社出版的《高中数学解题技巧》一书，可配成一套，成为中学数学教学完整的参考书。

由于作者的水平有限，编著时虽斟酌再三，恐难免仍有不少疏漏之处，敬请广大读者予以指正，以供再版或重印时参考。

编　　者

1994．1．

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com

目　录

一、怎样求代数式的值

（一）求代数式值的几种方法

1. 将字母的值直接代入代数式

这是求代数式值最基本的、也是最常用的方法。

例 1 已知 $x=\frac{1}{8}$， 求$\frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}+\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}+1}-\frac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$的值。

解 因为 $x=\frac{1}{8}$，所以 $x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$， $x^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$，代入原式，可得

$$\text{原式}=\frac{\frac{1}{8}-1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}+\frac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{4}+1}-\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{-7}{14}+\frac{9}{10}-\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{7}{20}。$$

例 2 假设 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)(a>0,b>0)$， 求

$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$的值。

解 因为 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，所以

$$1+x^2=1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2。$$

$$故原式=\frac{2a\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$=a+b。$$

2. 将所要求的代数式先化简然后再代入计算

有时所给的代数式比较繁，这时应首先将其化简，然后再将已知值代入，这样做往往可以减少计算量，使运算比较简捷。

例 3 已知 $x=\frac{4ab}{a+b}$，求 $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$的值。

分析 所给的两个分式的分子分母都是同次的，因此可以先做除法，将分式化为真分式，然后再代入求值。

解 原式 $=1+\frac{4a}{x-2a}+1+\frac{4b}{x-2b}$

$$=2+\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}。$$

将 $x=\frac{4ab}{a+b}$ 代入，可得

$$原式=2+\frac{4a}{\frac{4ab}{a+b}-2a}+\frac{4b}{\frac{4ab}{a+b}-2b}$$

$$=2+\frac{4a(a+b)}{2a(b-a)}+\frac{4b(a+b)}{2b(a-b)}$$

$$=2+\frac{2(a+b)}{b-a}+\frac{2(a+b)}{a-b}$$

$$=2。$$

例 4 已知 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}$， $b=-\frac{1}{2}$，求

$$\left(a-b+\frac{4ab}{a-b}\right)\left(a+b-\frac{4ab}{a+b}\right)。$$

解 首先将所给代数式化简，

$$原式=\frac{(a+b)^2}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

$$=(a+b)(a-b)$$

$$=a^2-b^2。$$

将 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$ 代入，得

$$原式=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=1。$$

例 5 当 $x=-\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 时，求

$6x+\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{4x}{x^4-2x^3+8x-16}$的值。

分析 本题所给的代数式比较复杂，因此首先应根据分式四则运算的法则将其化简；此外所给的条件也比较繁，在化简所给的代数式的同时，也要将所给条件化简。

解 原式$=6x+\left[\frac{x(x+2)-x(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right]\times\frac{(x-2)(x^3+8)}{4x}$

$$=6x+\frac{4x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\times\frac{(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)}{4x}$$

$$=6x+x^2-2x+4$$

$$=(x+2)^2。$$

因为 $x=-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$，所以$x+2=\sqrt{3}$。代入原式，可得

原式$=(\sqrt{3})^2=3$。

3. 将所给的条件化简

有时所给的条件比较复杂，这时首先应将条件化简，然后再代入计算就可使运算量减少。

例 6　已知 $a^2+b^2+4a+2b+5=0$　(a、b 是实数)，求$\frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-a}}$的值。

分析 本例虽未直接给出字母 a、b 的数值，但是将已知条件配方后，利用实数平方和等于零，则各实数为零的性质就

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

可求出 a、b 的值，从而求出代数式的值。

解 因为 $a^2+b^2+4a+2b+5=a^2+4a+4+b^2+2b+1$ $=(a+2)^2+(b+1)^2$，所以

$$(a+2)^2+(b+1)^2=0,$$

因此 $a+2=0$，且 $b+1=0$，即 $a=-2$，$b=-1$。代入原式，可得

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{1-(-1)}}{\sqrt{1-(-2)}}=\frac{\sqrt{6}}{3}。$$

例 7 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$，求 $\dfrac{80}{x^2-y^2}$ 的值。

分析 先将 x、y 的值分母有理化，使 x、y 的值化简，然后再代入求值。

解 $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$，

$$\therefore \quad \frac{80}{x^2-y^2}=\frac{80}{(x+y)(x-y)}=\frac{80}{2\sqrt{5}\cdot 4}$$

$$=2\sqrt{5}。$$

例 8 已知 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，求

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3。$$

分析 首先将 x、y 的值化简，同时将所给代数式变形，使之适合 x、y 值的代入。

解 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$

$$=(x+y)(x^2+y^2)$$

$$=(x+y)[(x+y)^2-2xy]。$$

化简 $$x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15},$$

$$y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4-\sqrt{15},$$

所以 $$x+y=8, \qquad xy=1。$$

故 $$原式=8\cdot(8^2-2)=496。$$

4. 设法变换已知条件或变换已知代数式后再求值

有时由已知条件直接求出字母的值后再代入所要求的代数式并不方便，这时可变换已知条件使其适合所要求的代数式，或变换所要求的代数式使其与所给条件相一致。这样做往往可达到事半功倍的效果，使运算大大简便。

例 9 已知 $x^2-3x+1=0$。求：

$$x^2+\frac{1}{x^2}、\ x^3+\frac{1}{x^3}、\ x^4+\frac{1}{x^4}$$

的值。

分析 因为 $x^2-3x+1=0$，所以所给 x 的值就是一元二次方程的两个根，由于方程的判别式大于零，所以这个方程确实有解，也就是说满足条件的 x 值确实存在。但是如果先解方程求出 x 的值后再代入所要求的代数式，虽然可以解出结果，可是运算量极大，非常容易发生错误，这样做是不合理的。由于所要求的代数式是 $x^2+\frac{1}{x^2}$、$x^3+\frac{1}{x^3}$ 等形式，因此自然想到把已知条件也变成类似的形式，而这一点是可以做到的。

解 因为 $x^2-3x+1=0$，显然 $x\neq0$，所以两端可同时除以 x，得

$$x+\frac{1}{x}=3。$$

两端同时平方，可得 $x^2+\frac{1}{x^2}+2=9$，所以

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7。$$

两端同时立方，可得 $x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$，所以

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18。$$

将 $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ 两端同时平方，可得

$$x^4+\frac{1}{x^4}+2=49,$$

所以

$$x^4+\frac{1}{x^4}=47。$$

因此 $x^2+\frac{1}{x^2}=7$，$x^3+\frac{1}{x^3}=18$，$x^4+\frac{1}{x^4}=47$。

例 10 已知 $a=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$，

求 a^3+12a 的值。

分析 先将已知条件的两端同时三次方，则左端就是 a^3，而右端可依乘法公式予以展开，凡有 $\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$ 者即可以 a 代之，如此变形后就有可能得到所求代数式。

解 将 $a=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$ 的两端同时三次方，可得

$$a^3=4(\sqrt{5}+1)-4(\sqrt{5}-1)-3\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}\times\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}\times\left[\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}\right]$$

$$=8-12a,$$

所以 $$a^3+12a=8。$$

例 11 已知 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值。

分析 因为要求的分式中，分子分母都是关于字母 x、y 的整式，因此可以将$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$ 先化成整式，然后再代入求值。这样做是将已知条件进行变形。同样，如果将所给代数式变形也是可以的，这时只要将分子分母同除以 xy 即可。

解法 1 因为$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，所以 $y-x=3xy$。代入所求分式，可得

$$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{3xy+2(x-y)}{-2xy+x-y}$$

$$=\frac{3xy-6xy}{-2xy-3xy}$$

$$=\frac{3}{5}。$$

解法 2 $\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\dfrac{\dfrac{2}{y}+3-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{y}-2-\dfrac{1}{x}}$

$$=\frac{3+2\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)}{-2+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{3-6}{-2-3}=\frac{3}{5}。$$

例 12 已知 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，求$\dfrac{1}{2}x^3-x^2-x+1$的值。

分析 化简已知条件后可知$x=\sqrt{3}+1$,即$x-1=\sqrt{3}$，$(x-1)^2=3$。因此在变换已知条件的同时，也可将所求的代数式变形,使之出现 $x-1$、$(x-1)^2$ 等形式。这样就可直接将 $x-1$、$(x-1)^2$ 的值代入，而不必先将 x 的值代入后再计算了。

解 因为 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，所以$x-1=\sqrt{3}$，$(x-1)^2=3$,即$x^2-2x+1=3$。

原式$=\dfrac{1}{2}x^3-x^2-x+1$

$$=\frac{1}{2}(x^3-2x^2-2x+2)$$

$$=\frac{1}{2}(x^3-2x^2+x-3x+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2\cdot x-3x+2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(3x-3x+2)$$

$$=1。$$

5. 根据已知条件求出字母之间的等量关系后再求值

例 13 已知$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，求$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{y^2}{x^2-y^2}$的值。

分析 因为$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，所以 $x=\frac{2}{3}y$，以这个值代入当然可求出所要的结果，但是如果引进一个比例常数，那么运算可更简便些。

解 因为$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$。设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k$，那么 $x=2k$，$y=3k$。代入所要求的代数式，可得

$$\frac{2k}{2k+3k}+\frac{3k}{2k-3k}-\frac{9k^2}{4k^2-9k^2}$$

$$=\frac{2}{5}-3+\frac{9}{5}=-\frac{4}{5}。$$

例 14 已知 $2x-3y+z=0$，$3x-2y-6z=0$，x、y、z 都不为零，求$\frac{x^2+y^2+z^2}{2x^2+y^2-z^2}$的值。

分析 将 $2x-3y+z=0$ 及 $3x-2y-6z=0$ 中的 z 看作常数，那么这就是一个以 x、y为未知数的二元一次方程组。解这个方程组就可求 x、y 与 z 的等量关系，然后以这个等量关

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c