QUALITATIVE ANALYSIS AND SYNTHESIS OF RECURRENT NEURAL NETWORKS

递归人工神经网络的定性分析和综合

〔美〕 A. N. 米歇尔　刘德荣　著

张化光　季　策　王占山　译

科学出版社

www.sciencep.com

递归人工神经网络的定性分析和综合

〔美〕A. N. 米歇尔　刘德荣　著
张化光　季　策　王占山　译

科学出版社
北　京

图字：01-2004-0885 号

内 容 简 介

本书系统地研究了递归人工神经网络的定性性能及其局限性，该类网络用于联想记忆的设计问题以及该类网络在实现过程中遇到的一些定性分析问题。全书共九章，主要内容包括针对一系列递归人工神经网络模型的全局性能及局部性能的定性分析以及参数摄动、时间延迟、互联结构约束等对其性能的影响。书中所给的用于联想记忆的综合设计方法包括外积法、投影学习规则、特征结构法及基于感知器的训练方法等。该书主要特点是透彻的理论分析加上详细的综合设计方法，尤其是针对有互联结构约束的递归人工神经网络（包括细胞神经网络）提出了开创性的综合设计方法。

本书适合于应用数学、物理学、电子信息、自动化、计算机应用专业的研究人员、研究生和对人工神经网络感兴趣的工程技术人员。

Anthony N. Michel, Derong Liu

QUALITATIVE ANALYSIS AND SYNTHESIS OF RECURRENT NEURAL NETWORKS

ISBN: 0-8247-0767-2

图书在版编目(CIP)数据

递归人工神经网络的定性分析和综合 / （美）米歇尔（A. N.）等著；张化光等译.— 北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-013017-0

Ⅰ.递… Ⅱ.①米…②张… Ⅲ.人工神经元网络-研究 Ⅳ.TP183

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 023381 号

策划编辑：鄢德平/责任编辑：田士勇/责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 7 月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2004 年 7 月第一次印刷　印张：19 1/4

印数：1—2 000　字数：365 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

译 者 的 话

本书对递归神经网络进行了定性分析和综合。该书由位于纽约的国际著名的 Marcel Dekker 公司出版发行。由于内容先进、严谨、系统、实用，该书畅销北美和欧洲，并且是目前唯一的一本系统地介绍递归神经网络定性分析和综合的学术专著。这些原因成为我们翻译和出版该学术专著的动力。

本书所研究的网络包括：Sigmoid 函数或饱和非线性函数作为激活函数的 Hopfield 同步连续/离散神经网络；具有无限增益放大器的连续 Hopfield 神经网络；Cohen-Grossberg 网络；闭超立方体上的连续/离散线性系统；sign 函数作为激活函数的异步离散 Hopfield 神经网络等。

本书针对上述人工递归神经网络进行定性分析和综合研究。所谓定性分析就是研究描述这些网络的微分方程的解的存在性、唯一性、连续性等关键性能。本书分别从无参数摄动的网络模型和有参数摄动的网络模型得到了相应的定性分析结果。所谓综合就是研究如何利用所得到的定性分析结果来获取或改进网络学习规则和优化设计网络，提高网络存储能力。在本书中，所研究的网络特性主要用于联想记忆。

本书主要研究内容包括：

a) 对于所研究的网络，建立精确的条件来保证孤立平衡点的存在；给出平衡点数量的上界估计值及渐近稳定平衡点数量的上界估计值，建立一个系统地确定所有平衡点位置及其稳定特性的算法。此外，还将给出神经网络只存在一个平衡点的条件。

b) 对于所研究的网络，在无参数摄动和有参数摄动的情况下，给出网络全局稳定和局部稳定的精确条件，并给出局部渐近稳定平衡点吸引域的估计方法。

c) 由于参数摄动可引起神经网络渐近稳定平衡点的变化或消失，为此，对摄动神经网络建立了鲁棒稳定性结果，给出了摄动神经网络的平衡点接近于无摄动神经网络平衡点的条件，并确定了摄动神经网络与相应的无摄动神经网络的工作点之间距离的估计。这样，在联想记忆应用中为减少假状态的数量、增强网络的存储能力提供了理论依据。

d) 在神经网络实现过程中，对于给定的一组期望稳定记忆，为了使具有延迟的神经网络的渐近稳定平衡点与相应的无延迟神经网络的渐近稳定平衡点具有相同的稳定特性，分别给出了独立于延迟和依赖于延迟的稳定条件，进而可给出延迟上界的估计值。

e) 利用所得到的定性分析结果，给出了几种利用递归神经网络实现联想记忆的综合方法及其改进形式，并指出了各种综合方法的优点与不足。

f) 在递归神经网络的实现过程中，由于对网络互连结构施加某种约束可使网络具有期望的性能，因此以细胞神经网络为例，给出了网络互连结构具有约束条件的联想记忆综合方法。

译者在近半年时间里连续紧张地工作，查阅了大量的相关文献，力求将每一个术语、每一段文字都表达得规范、流畅、简练、易懂，并就许多疑难问题或原书存在的错误之处与原作者进行了及时的沟通和核准。由于译者水平有限，文中难免会有许多不妥之处，欢迎读者批评指正。本书的翻译和出版得到了国家杰出青年科学基金（项目编号：60325311）、国家自然科学基金（项目编号：60274017）和东北大学研究生教材出版基金的资助，在此表示感谢。

张化光

2004 年 5 月于美国 UIC 大学

前　言

在本书中，我们仅对递归人工神经网络做定性的分析和综合研究。涉及到此类网络定性特性的论文、专著和书籍是极其丰富的。然而在那些论著中，对神经网络的分析只是在侧重研究其他重要问题时附带提及，但在本书中，网络本身成了我们研究的主要对象。把递归神经网络作为主要研究对象的论著是很少的，因此这种网络的很多定性特性及其局限性常常被人们所忽视而显得模糊不清。

本书对人工递归神经网络的定性行为及其性能的局限性进行了系统的分析。这种局限性或是由网络的内在特性决定的，或是在网络实现过程中引起的（例如通过 VLSI、专用数字硬件、光电法、仿真或者其他方法）。尽管本书的目标是尽可能地得出具有普遍意义的结果，但并不是说要把它写成囊括各种递归神经网络的百科全书。这种尝试是没有意义的，而且更重要的，这是我们所不期望的，因为这将偏离我们的主要目标。相反，为了明确思想，提供研究的动机，我们将致力于几种重要的、有代表性的神经网络的研究，必要时，还会列举一些应用实例。本书所研究的网络包括：模拟（即连续）Hopfield 神经网络（具有 Sigmoid 激活函数）；具有无限增益放大器的模拟 Hopfield 神经网络（即变结构系统）；具有饱和非线性激活函数的模拟 Hopfield 神经网络；模拟 Hopfield 神经网络的几种广义形式，其中包括 Cohen-Grossberg 网络；离散 Hopfield 神经网络（即把 sign 函数作为激活函数的异步离散网络）；分别把 Sigmoid 函数、饱和函数和 sign 函数作为激活函数的 Hopfield 同步离散神经网络；工作于闭超立方体上的线性系统（包括连续和离散两种）。在需要确定网络性能的时候，常把联想记忆作为应用，并用外积法、投影学习规则、特征结构法或基于感知器的训练方法来综合网络。

下面我们讨论一些关于人工神经网络定性分析的重要问题。

因为变结构系统和闭超立方体上的线性系统具有不连续的动态特性，因此本书对描述网络的微分方程解的存在性、唯一性和连续性进行认真的分析，并为所研究的网络建立了保证孤立（即离散）平衡点存在的条件；给出了平衡点和渐近稳定平衡点数量的上界值。此外，本书还建立了系统地确定所有平衡点的位置及平衡点局部稳定特性的结果；同时给出了网络中渐近稳定平衡点的吸引域、轨迹边界以及收敛于渐近稳定平衡点速率的估计。对于一个给定的神经网络，本书给出了只存在一个平衡点的条件。

本书还为所研究的网络，利用适当的能量函数建立了保证网络是全局稳定（即所有的网络运动都将趋于一个渐近稳定平衡点）的条件。一个全局稳定网络

工作的状态空间是由网络的渐近稳定平衡点的吸引域来划分的。这种划分确立的等价关系，又成了许多实际应用的理论基础，其中包括联想记忆的应用。

一个递归神经网络中预先确定的用来存储信息和数据的渐近稳定平衡点称为稳定记忆；而其他的渐近稳定平衡点（不期望的）称为假状态。对所讨论的某些网络，还为网络参数建立了条件，以减少假状态的数量，增强网络的存储能力。

在人工神经网络的实现过程中，我们要研究的主要问题如下：给定一个具有一组期望工作点的神经网络（即联想记忆中的一组期望的稳定记忆）和一个相应的具有参数摄动的（原始无摄动）神经网络，确定适当的条件，保证在原始无摄动神经网络的工作点附近，存在一组摄动神经网络的工作点（且具有相同的稳定特性）；确定无摄动神经网络的工作点和相应的摄动神经网络的工作点之间距离的估计。这类问题的结果可作为一种指标来衡量由网络参数摄动引起的网络工作点误差大小。

在人工递归神经网络的实现过程中，我们要研究的另一个重要问题是：给定一个具有一组期望工作点（且互连没有延时）的神经网络和一个相应的有延时的神经网络，确定适当的条件，保证对于所有小于某一上界的延时，有延时的神经网络的工作点与相应的无延时的神经网络的工作点是一致的，并且具有相似的定性特性（即在联想记忆中，有延时的网络与相应的无延时网络具有相同的渐近稳定平衡点），并确定允许延时上界的估计值。

在人工递归神经网络的实现过程中，要研究的另一个可能遇到的问题是：针对联想记忆，设计出适用于网络互连结构具有约束条件（例如预先确定的稀疏约束，如在细胞神经网络中就存在这种约束）的综合技术。

总之，在本书中，我们不是讨论人工神经网络中周期运动（极限环）的存在性和定性特性；相反，我们关心的是这类网络中周期运动的非存在性问题。

本书适合于应用数学和物理学专业的研究人员、研究生和对人工神经网络感兴趣的工程技术人员。读者需有线性代数、实分析和微分方程等方面的预备知识。本书也可作为研究生教材或参考资料。

本书的许多资料来自我们和几个同事及以前的学生所做的一些研究。他们是：J. A. Farrell, Z. Feng, D. L. Gray, Lj. T. Grujić, L. Hou, J. H. Li, D. Liu, Z. Lu, W. Porod, J. Si, H. F. Sun, K. Wang, H. Ye 和 G. Yen。

在此，我们对张聪女士为排版和校对工作所付出的努力和耐心表示衷心的感谢！

A. N. 米歇尔
刘德荣

目　录

第一章 绪 论

人工神经网络是受人脑功能的启发而发展起来的，并试图去模拟某些生物系统。正因为如此，人工神经网络是由大量的元素，即神经元相互连接而成。神经元的输入由神经元输出的适当加权和及偏置项(必要时)组成。神经元是由适当的函数，也称为激活函数来描述。

在文献中讨论的多种不同类型的人工神经网络通常分为两大类：前馈神经网络（即没有反馈的神经网络）和递归神经网络（即有反馈回路的神经网络）。第一类网络中被人们所熟知、应用最广泛的是用反向传播算法来“训练”网络的多层感知器；第二类网络中最为流行的是用外积法来“训练”网络的 Hopfield 神经网络。

尽管目前还没有关于人工神经网络分类的正式的严格的定义可遵循，但“反馈神经网络”这一术语常用于单层的、全互连的反馈网络。本书中所讨论的大部分是这一类网络，但在最后一章，将研究具有预先确定的稀疏约束(将导致网络不能完全互连)的网络。正是因为这个原因，在本书中将“递归神经网络”这一术语应用到我们所考虑的网络上来。但是不管使用何种术语，这种网络构成了具有有意义的定性特性的大规模动态系统的重要组成部分。

目前已有很多关于递归神经网络定性特性的论文、专著和书籍[1,5,8,9,13~16,30,46,51]。但在那些著作中，定性分析通常只是在做其他重要研究时附带提及，把递归神经网络本身做为主要研究对象的著作很少。因此，无论是网络本身所固有的，还是在网络实现过程中所遇到的定性的局限性问题(通常是由 VLSI、专用数字硬件、光电法，甚至是仿真产生的)，常常被人们所忽视而变得模糊不清。

本书对递归人工神经网络进行了系统的分析，这种网络的定性行为及其性能都有一定的局限性。这种局限性或是由于网络的内在特性决定的，或是在网络实现过程中产生的。虽然本书的目标是尽可能地得出具有普遍意义的结果，但是并不是说要把它写成囊括诸文献中提到的各种递归神经网络的百科全书。这种尝试是没有意义的，而且更重要的，这是我们所不期望的，因为这将偏离我们的主要目标。相反，为了明确思想，提供研究的动机，我们将致力于几种重要的、有代表性的神经网络的研究，必要时，还将列举一些应用实例。我们所研究的网络包括：模拟(即连续)Hopfield 神经网络；具有 Sigmoid 激活函数或饱和非线性激活函数的 Hopfield 同步离散神经网络；sgn 函数做为激活函数的离散 Hopfield 神经网络(即异步离散网络)；Sigmoid 函数具有无限增益的模拟 Hopfield 神经网络(即变结构系统)；Grossberg 模型(模拟 Hopfield 模型的广义形式)；工作于闭超立方体上的线

性系统(包括连续和离散两种情况)。在研究网络特性时,常把联想记忆做为应用(用外积法、投影学习规则、特征结构法或基于感知器的训练方法来综合网络)。

本书将不对人工神经网络中周期运动(极限环)的存在性和定性特性进行讨论;相反,将重点研究网络中周期运动的非存在性。

1.1 本书的研究内容

下面,将对本书涉及到的具体问题做一下详细的描述。

a) 由于描述 Sigmoid 函数具有无限增益的模拟 Hopfield 神经网络和闭超立方体上的线性系统的微分方程具有不连续的动态特性,因此,本书将进一步研究这类方程解的存在性、唯一性及连续性。

b) 对于所研究的网络,将建立精确的条件来保证孤立平衡点的存在,给出平衡点数量的上界值及渐近稳定平衡点数量的上界值。同时,将建立一个系统地确定所有平衡点位置及其稳定特性的算法。此外,还将给出渐近稳定平衡点吸引域的估计方法及神经网络只存在一个平衡点的条件。

c) 对于所研究的网络,将给出网络全局稳定的精确条件,即网络的所有运动趋于平衡点的条件。在这些条件下,网络工作的状态空间将被网络的渐近稳定平衡点的吸引域所划分。这种划分反过来又建立了一种等价关系,这种关系适用于数据分类、模式识别等多种应用。

d) 在递归神经网络中,用来存储信息或数据的预先确定的渐近稳定平衡点称为稳定记忆,而其他的不期望的渐近稳定平衡点称为假状态。对于所讨论的某些网络,将为网络参数建立适当的条件以减少假状态的数量,从而增强网络的存储能力。

e) 在人工神经网络的实现过程中,我们要研究的主要问题如下:给定一个具有一组期望工作点(即联想记忆中一组期望的稳定记忆)的神经网络和一个相应的具有参数摄动(原始无摄动)的神经网络,建立条件保证在原始无摄动神经网络的工作点附近,存在一组摄动神经网络的工作点(且具有相同的稳定特性),并确定摄动神经网络与相应的无摄动神经网络的工作点之间距离的估计。

f) 在人工递归神经网络的实现过程中,我们要研究的另一个重要问题是:给定一个具有一组期望的工作点,且互连时没有延迟的神经网络和一个相应的互连时有延迟的神经网络,确定条件保证对于所有小于上界的延迟,有延迟的神经网络的工作点与相应的无延迟神经网络的工作点是一致的,且有相同的定性行为(即在联想记忆中,具有延迟的神经网络的渐近稳定平衡点与相应的无延迟网络的渐近稳定平衡点是一致的),并确定允许延迟上界的估计值。

g) 在人工递归神经网络的实现过程中,要研究的另一个可能遇到的问题是:

设计出适用于网络互连结构具有约束条件(例如预先确定的稀疏约束,在细胞神经网络中就存在这种约束)的联想记忆综合技术。

上述考虑的问题都具有重要的实际意义。例如,a) 中讨论的问题在对递归神经网络进行建模及讨论其研究价值时非常重要,b)和 d)提到了网络存储信息的容量问题,c) 能保证网络正常运行。最后,e)、f)和 g)中讨论的问题在网络实现过程中具有重要的意义(特别是在 VLSI 的实现过程中)。此外,参数摄动一般会导致网络工作点(稳定记忆)的不准确,传输延迟会限制网络的规模,互连约束会减弱网络的存储能力。

在本章的余下部分,将对本书的部分内容做一下大致的介绍。

1.2 一些神经网络模型

在文献中介绍过大量的递归神经网络模型,在第二章中将选出其中几个进行讨论。

由于历史原因,首先介绍 McCulloch-Pitts 模型[29],它由下式给出:

$$\begin{cases} v_i(k+1) = \operatorname{sgn}(u_i(k)), & 1 \leqslant i \leqslant n \\ u_i(k) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} v_j(k) + I_i, & 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{1.2.1}$$

其中,每个神经元由下列 sign 函数表示

$$\operatorname{sgn}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta > 0 \\ -1, & \theta < 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

u_i 表示第i 个神经元的输入;v_i 表示第i 个神经元的输出;T_{ij}表示第j 个神经元和第 i 个神经元之间互连的强度;I_i 表示神经元i 的外部输入。(1.2.1)中的状态可进行异步切换。

其次,将详细介绍模拟 Hopfield 神经网络模型[10,11]及其实现[30]。网络由下列方程*描述:

$$\begin{cases} C_i(\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t) = -u_i/R_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} v_j + w_i \\ v_i = g_i(\lambda u_i), \quad i = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{1.2.3}$$

其中,同前所述,u_i 和 v_i 分别表示神经元的输入和输出;w_i 表示第i 个神经元的外部输入;$C_i > 0$ 和 $R_i > 0$ 分别表示电容和电阻;$t_{ij} \in \Re$ 表示神经元相互连接的权

---

* (1.2.3)原书为 $\begin{cases} C_i(\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t) = -1/R_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} v_j + w_i \\ v_i = g_i(\lambda u_i), \quad i = 1, \cdots, n \end{cases}$ ——译者注

值,它由电导决定。每一个神经元由一个 Sigmoid 函数来表示。一个常用的 Sigmoid 函数由下式给出:

$$v_i = g_i(\lambda u_i) = (2/\pi)\arctan((\pi/2)\lambda u_i) \tag{1.2.4}$$

(1.2.3)用向量形式表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + Ty + I \\ y = S(x) \end{cases} \tag{1.2.5}$$

其中,$S(x)=(s_1(x_1),\cdots,s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$;$s_i(x_i)=g_i(\lambda u_i)/C_i$;$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$;$A=\mathrm{diag}[a_1,\cdots,a_n]$;$T=[T_{ij}]$;$I=(I_1,\cdots,I_n)^{\mathrm{T}}$。各变量的定义是显而易见的。

(1.2.5)可变形为如下方程描述的网络[2,24]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + Ty + I \\ y = \mathrm{sat}(x) \end{cases} \tag{1.2.6}$$

其中,$\mathrm{sat}(x)=(\mathrm{sat}(x_1),\cdots,\mathrm{sat}(x_n))^{\mathrm{T}}$,且

$$\mathrm{sat}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 1 \\ x_i, & -1 \leqslant x_i \leqslant 1 \\ -1, & x_i < -1 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

为了通过数字计算机仿真或专用数字硬件来近似模拟 Hopfield 神经网络,在第二章中将介绍同步离散 Hopfield 神经网络模型[31,33],它由如下方程描述:

$$u_i(k+1) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}v_j(k) - a_iu_i(k) + I_i, \quad i = 1,\cdots,n \tag{1.2.8}$$

式中各符号的定义与(1.2.5)中的定义相同。

在第二章中还将介绍两种模拟 Hopfield 神经网络模型的广义形式,第一种形式由下列方程描述[18]:

$$\dot{x} = -H(x)(-Tx + S(x) - I) \tag{1.2.9}$$

其中,x,T,$S(x)$和 I 的定义与(1.2.5)中的定义相同;$H(x)$是 $n\times n$ 矩阵值函数。第二种形式是 Cohen-Grossberg 模型[4],由如下形式的方程描述:

$$\dot{x}_i = -a_i(x_i)\left[b_i(x_i) - \sum_{j=1}^{n} t_{ij}s_j(x_j)\right], \quad i = 1,\cdots,n \tag{1.2.10}$$

式中 x_i,t_{ij}和 $s_j(x_j)$的定义与(1.2.3)、(1.2.5)中的定义相同;$a_i(\cdot)$是正的、有界连续函数;函数 $b_i(\cdot)$也是连续的。

在放大器增益很大时,即当(1.2.3)[及(1.2.4)]中的 λ 任意大时,一些模拟 Hopfield 神经网络的综合过程,工作效果最好,这种情况在第二章中也会考虑。在这种假设下,模拟 Hopfield 神经网络具有下式描述的变结构系统的形式[19]:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x) \tag{1.2.11}$$

且

$$F(x) = -Ax + TS(x) + I \tag{1.2.12}$$

其中，$S(x)=(s_1(x_1),\cdots,s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$，$s_i(\cdot)$表示 sign 函数[参见(1.2.2)]，其余的符号在(1.2.5)中已定义。在适当的假设条件下，上述模型中神经元的输出值与离散异步 Hopfield 模型的输出值相同，输出值由下式描述：

$$v_i^+ = \begin{cases} 1, & 若\sum_{j=1}^{n} T_{ij}v_j + I_i > 0 \\ -1, & 若\sum_{j=1}^{n} T_{ij}v_j + I_i < 0 \end{cases} \tag{1.2.13}$$

式中所有符号的定义与(1.2.1)中的定义相同。

前面考虑的神经网络模型包括模拟 Hopfield 神经网络模型，这种网络的变形和相应的广义形式以及和模拟 Hopfield 神经网络相似的同步和异步数字网络。在第二章中将要讨论的最后一类神经网络和前面所描述的网络有明显的不同。这类网络的连续模型由下列形式的方程描述[20]：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Tx + I \tag{1.2.14}$$

约束为

$$-1 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad i = 1,\cdots,n \tag{1.2.15}$$

这类网络的离散模型由下式描述[36]

$$x((k+1)h) = F(\Phi x(kh) + \Gamma) \tag{1.2.16}$$

其中，$F(x)=(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n))^{\mathrm{T}}$，每一个 $F_i(\cdot)$表示一个饱和函数[参见(1.2.7)]，

且

$$\Phi = [\Phi_{ij}] = \exp(hT) \tag{1.2.17}$$

其中，

$$\Gamma = I \cdot \left(\int_0^h \exp(\eta T)\mathrm{d}\eta\right) \tag{1.2.18}$$

独立于(1.1.14)所示的连续系统，我们也将考虑由下列差分方程描述的离散系统：

$$x(k+1) = \mathrm{sat}(Tx(k) + I) \tag{1.2.19}$$

令(1.2.16)中的 $T=\Phi$，$I=\Gamma$ 和 $h=1$，即得(1.2.19)。

1.3 模拟 Hopfield 神经网络的定性分析：全局结果

第三章中将首先研究广义模拟 Hopfield 神经网络的全局定性特性，这种网络由(1.2.9)所示方程描述[18]。利用如下形式的能量函数：

$$E(x) = -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Tx + \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{x_i} s_i(\rho)\mathrm{d}\rho - x^{\mathrm{T}}I \tag{1.3.1}$$

式中所有符号在(1.2.9)中已定义，我们将证明在合理的假设下，对于系统(1.2.9)，下列结果成立：

i) 对于任意的 $x \in (-1,1)\times\cdots\times(-1,1)=(-1,1)^n$，(1.2.9)有唯一的解 $\varphi(\cdot,0,x)$；

ii) 沿着(1.2.9)的非平衡解，能量函数 E 单调递减，因此，(1.2.9)的非常值周期解是不存在的；

iii) 每一个解存在于 $\Re^{+}=[0,\infty)$上；

iv) 当 $t\rightarrow\infty$时，(1.2.9)的每一个非平衡解均将收敛于(1.2.9)的一个平衡点[即网络(1.2.9)是全局稳定的]；

v) (1.2.9)具有有限个平衡点。

还将进一步证明在适当的假设条件下，下列陈述是等价的：

i′) $\tilde{x}$ 是(1.2.9)的一个稳定平衡点；

ii′) $\tilde{x}$ 是能量函数E 的局部最小点；

iii′) $J(\tilde{x})>0$，即系统(1.2.9)的 Jacobi 矩阵在 $x=\tilde{x}$ 处是正定的；

iv′) $\tilde{x}$ 是渐近稳定的。

在很多应用中用到了上面给出的结果。例如，可根据系统的全局稳定特性[第 iv 条]，利用(1.2.9)的渐近稳定平衡点的吸引域来划分(1.2.9)的状态空间。这种划分反过来又为系统(1.2.9)确定了一种等价关系，这种等价关系又可用于分类问题，其中包括联想记忆的应用。在第八章中，将对上述结果做出证明。

在第三章中，还将研究由(1.2.11)、(1.2.12)给出的变结构系统[19]所描述的一类神经网络的全局(及某些局部)定性特性。对于这样的系统，将按照下列顺序得出结果：

i) 将为系统(1.2.11)、(1.2.12)介绍一种适当的解的概念(包括滑模[45]的概念)。还将证明，对于任意的初始条件，都存在一个这样的解，并且所有的解都可扩展到无穷的时间区间内。

ii) 对(1.2.11)、(1.2.12)所示的系统，将给出一个精确的平衡点的概念，还将证明，在由方程(1.2.11)右侧的不连续表面 M 分割而成的 2^n 个区域中的每一个区域内，最多存在一个渐近稳定平衡点。

iii) 将证明，如果在上述的一个区域内，例如 G 内，存在一个平衡点 x_0，则 G 在x_0 的吸引域内。

iv) 还将证明，在 $\Re^n-M$ 内的渐近稳定平衡点和(1.2.11)、(1.2.12)的稳定输出向量之间存在一一对应的关系[函数 S 的分量构成了(1.2.11)、(1.2.12)的输出向量]。