成人中专试用教材

数学 第三册

天津市职工中等专业学校编 李梓伦主编

高等教育出版社

CHENGREN ZHONGZHUAN SHIYONG JIAOCAI

成人中等专业学校试用教材

数　　学

（第 三 册）

安徽省职工电视中等专业学校编

李祥伦　主编

高等教育出版社

内 容 简 介

本套《数学》教材是国家教育委员会成人教育司和高等教育出版社共同组织编写的成人中等专业学校通用教材之一，全套书分为六册，包括《数学》(基础部分共三册)、《微积分初步》、《线性代数与线性规划》和《概率与统计初步》．其中《数学》第一、二册可供成人中专工科和财经类各专业使用，第三册供工科和其他有关专业选用．

本册书的主要内容有极坐标与参数方程、复数和立体几何共三章，书后附有习题答案或提示．编写时，注意了成人学习特点，便于自学．

本册书可作为广播电视中专、面授中专、函授中专等各种形式的成人中专工科类教材，也可作为成人自学读物．

成人中等专业学校试用教材

数　学

(第 三 册)

安徽省职工电视中等专业学校编

李祥伦　主编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.875　字数 98,000

1987 年 10 月第 1 版　1987 年 10 月第 1 次印刷

印数 0,001—80,700

ISBN 7-04-000 288-4/O·296

书号 13010·1108　　定价 0.74 元

有思考题和练习题.

为了保证教材质量，我们在全国各地遴选有丰富教学经验的教师担任编写工作，每本教材在定稿前都召开了编写提纲讨论会和审稿会，请全国各地的专家和有丰富教学经验的教师参加审定. 在此我们向为这套教材做出贡献的同志表示衷心地感谢.

本系列教材自一九八六年秋季起陆续出版，三年内出齐，并陆续配套出版一部分课程的学习辅导书，欢迎广大读者选用并提出宝贵意见.

前　言

本套《数学》教材是国家教育委员会成人教育司和高等教育出版社共同组织编写的成人中专通用教材之一．全书分为六册：《数学》(基础部分共三册)、《微积分初步》《线性代数与线性规划》、《概率与统计初步》．安徽省经委、省职教委和省教委直接领导了本套教材的编审工作．

为了保证教材内容达到成人中专的基本要求，并使教学方法融汇于教材内容之中，便于成人自学，我们在编写过程中，作了以下几个方面的努力：

1．注意从实例引入概念，并以典型例题来巩固和验证所学理论；普遍采取解题前作指导性的思路分析，解题后作归纳性的方法注释，重要内容都作辅导性总结；每章之前给出了简要说明，使读者对这一章的内容和基本要求有一个初步了解；每章之后加以小结，使读者温故而知新；每段后附有练习题，每章后附有复习题，书末附有答案或提示．这样，读者在学习时，就象有一个无声的教师在进行辅导，帮助读者理解和巩固所学知识．

2．着力于教材内容的削枝强干，贯彻少而精原则，不贪多求全，不攀高求深，文字叙述力求通俗，普遍地注意到以成人易于接受和记忆的方式叙述一些重要结论．由于数学本身内容十分丰富，这样处理教材还是一种尝试，有待进一步改进．

3. 各部分基本内容，力求讲明它们的应用，并为读者应用所学知识解决实际问题提供思路、模型和方法. 因此，我们尽可能在不增大篇幅的前提下，兼顾了一般工科和财经类的一些最基本的应用问题

4. 本册供工科类各专业使用，对财经类等其它专业学有余力的读者也可选用.

本套教材由安徽省职工电视中专李祥伦担任主编，聘请合肥工业大学潘麟生、周传瑞和安徽财贸学院陈永庆编写.

数学：第一、二章由潘麟生、李祥伦执笔；第三章由李祥伦、陈永庆执笔；第四章由周传瑞执笔；第五章由陈永庆、李祥伦执笔；第六、七、八章由李祥伦、陈永庆执笔.

微积分初步：由周传瑞、潘麟生、李祥伦执笔.

线性代数与线性规划：由陈永庆、李祥伦执笔.

概率与统计初步：由潘麟生、周传瑞执笔.

本套教材由安徽省数学会副理事长、合肥工业大学教授张智珊主审，朱功勤教授、卢树铭副教授审稿，并邀请梁克庸和孙纪堂等同志参加了本册书的审稿会. 对于他们所提宝贵意见，我们表示衷心感谢. 并感谢王宗植同志为本册书绘制了全部插图.

由于编者水平有限，时间紧迫，错误和不妥之处在所难免，恳请广大教师和读者批评指正.

编　者

1986年12月于合肥

目　录

第六章　极坐标与参数方程

本章所介绍的是极坐标系和曲线的极坐标方程、曲线的参数方程以及几种常见平面特殊曲线的初步知识.

学习本章时，要求：

1．理解极坐标系、曲线的极坐标方程的概念，以及它们与平面直角坐标系、曲线的直角坐标方程的异同点；掌握两种坐标的互化方法；能够根据已知条件，建立曲线的极坐标方程，并能在极坐标系中画出方程的曲线.

2．理解曲线参数方程的概念，掌握化曲线参数方程为普通方程的方法．能在已给的条件下化曲线的普通方程为参数方程.

3．知道等速螺线、摆线、圆的渐开线是怎样形成的，以及建立它们的方程的方法.

本章的重点是：极坐标、极坐标方程与参数方程的概念，极坐标与直角坐标的互换.

§6.1　极　坐　标

一、极坐标系

以前，我们确定平面上点的位置和建立曲线方程都是采用直角坐标系，它是一种既常用又简单的坐标系．除了直角坐标系外，还有其它的坐标系．例如，我们说："向东北走四里就到了."这时仍用直角坐标系就不方便，如果能用距离

和角度这两个量来确定目标的位置就方便多了．本章介绍的极坐标系就是一种用有向距离和方向角度建立的坐标系．

在平面内取一点 O，引一条射线 Ox 并规定一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向），建立的坐标系叫做极坐标系（图 6-1），O 点叫做极点，射线 Ox 叫做极轴．对于平面上任一点 M，用 ρ 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度．ρ 叫做点 M 的极径，θ 叫做点 M 的极角，有序数对 $(\rho,\ \theta)$ 叫做点 M 的极坐标，极坐标为 $(\rho,\ \theta)$ 的点可记为 $M(\rho,\ \theta)$．当点 M 在极点时，它的极坐标 $\rho=0$，θ 可取任意值．

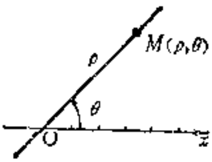


图 6-1

如图 6-2 所示，在极坐标系中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标分别是 $(4,\ 0)$、$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$、$\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$、$\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$、$(3.5,\ \pi)$、$\left(6, \frac{4\pi}{3}\right)$、$\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$．

极角也可取负值，例如图 6-2 中的点 B、D、F 的极坐标也可写成 $\left(2,\ -\frac{7\pi}{4}\right)$、$\left(1,\ -\frac{7\pi}{6}\right)$、$\left(6,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$．

在一般情况下，极径都是取正值，但是在某些必要情况下，也允许取负值．

当 $\rho<0$ 时，点 $M(\rho,\ \theta)$ 的位置可按下列规则确定：作射线 OP，使 $\angle xOP=\theta$，在 OP 的反向延长线上取一点 M，使 $|OM|=|\rho|$，这样得到的点 M 就是极坐标为 $(\rho,\ \theta)$ 的点（图 6-3）．

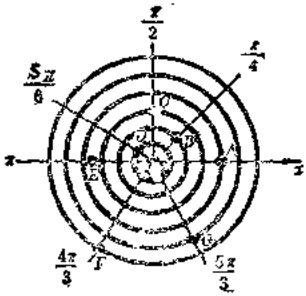


图 6-2

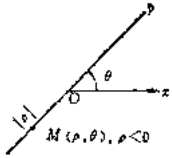


图 6-3

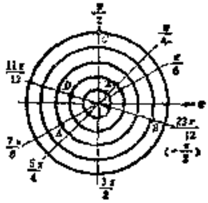


图 6-4

例如，图 6-4 中，当极径取负值时，点 A、B、C、D、E 的极坐标分别为 $\left(-3,\ \frac{\pi}{6}\right)$、$\left(-4,\ \frac{11}{12}\pi\right)$、$\left(-5,\ -\frac{\pi}{2}\right)$、$\left(-2,\ -\frac{\pi}{12}\right)$、$\left(-1,\ \frac{5}{4}\pi\right)$.

从图 6-4 可以看出，$\left(-3,\ \frac{\pi}{6}\right)$ 与 $\left(3,\ \frac{7}{6}\pi\right)$ 表示同一点 A，$\left(-4,\ \frac{11}{12}\pi\right)$ 与 $\left(4,\ \frac{23}{12}\pi\right)$ 表示同一点 B，$\left(-5,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\left(5,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 表示同一点 C，$\left(-2,\ -\frac{\pi}{12}\right)$ 与 $\left(2,\ \frac{11}{12}\pi\right)$ 表示同一点 D，$\left(-1,\ \frac{5}{4}\pi\right)$ 与 $\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 表示同一点 E.

可见，$(\rho,\ \theta)$ 与 $(-\rho,\ \theta+\pi)$ 在极坐标系中是同一点的极坐标．又因为一个角加 $2n\pi$（n 为任意整数）后，都是和原角终边相同的角．进而可见，如果 $(\rho,\ \theta)$ 是一点 M 的极坐标，那么 $(\rho,\ \theta+2n\pi)$，$(-\rho,\ \theta+(2n+1)\pi)$ 也都是 M 点的极坐标.（这里的 n 是任意整数）.

与平面直角坐标系相同的是，在平面上建立了极坐标系后，给定了 ρ 和 θ，就可以在平面上确定唯一的一个点．与平

面直角坐标系不同的是，给定平面上一点 M，它的极坐标却有无数多. 可见，在平面极坐标系中，点 M 与有序实数对 ρ, θ 仅仅是对应，但不一一对应. 如果我们限制 $\rho>0$, $0\leqslant\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点外，平面上的点 M 和有序实数对 ρ, θ 就一一对应. 今后若不作特殊说明，都是 $\rho\geqslant0$.

练 习 题 1

1. 以极点为端点的射线上的点的极坐标有什么特点？以极点为圆心的圆周上的点的极坐标有什么特点？

2. 在同一极坐标系中，作出下列各点：

$$A.\left(2.5,\ \frac{\pi}{3}\right)、B.(3,\ -120°)、C.(-1,\ \pi)、D.\left(-2,\ -\frac{7\pi}{3}\right).$$

3. 说明当 $\rho>0$ 时，如果 $(\rho,\ \theta)$ 是一个点的极坐标，那么 $(-\rho,\ \theta+(2k+1)\pi)$ 也是这个点的极坐标.

二、极坐标和直角坐标的互化

平面上的点既可以用极坐标表示，也可以用直角坐标表示；相应地，平面上的一条曲线也是既可以用极坐标方程表示，也可以用直角坐标方程表示. 在同一个平面上同时建立了极坐标系和直角坐标系以后，这个平面上的任意一点的极坐标和直角坐标之间就有着一种确定的关系，利用这种关系，我们能够进行点的两种坐标的互化和曲线的两种方程的互化，而且通过这种互化，可以为我们研究某些问题提供方便.

我们只研究在下述情况下的两种坐标的互化.

如图 6-5 所示，在一个平面上同时建立的极坐标系和直角坐标系中，极坐标系的极点和直角坐标系的原点重合，极坐标系的极轴和直角坐标系的 x 轴的正半轴重合，并在两种坐

标系中取相同的长度单位，设 P 是平面内的任意一点，它的极坐标是(ρ, θ)，直角坐标是(x, y).

当 $\rho>0$ 时，由任意角的三角函数的定义可得

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho}, \quad \sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

$$\therefore \quad x=\rho\cos\theta, \ y=\rho\sin\theta. \qquad (*)$$

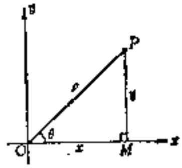


图 6-5

当 $\rho<0$ 时，先将点 P 的极坐标写成$(-\rho, \theta+\pi)$，再利用关系式$(*)$得

$$x=-\rho\cos(\theta+\pi)=-\rho(-\cos\theta)=\rho\cos\theta,$$

$$y=-\rho\sin(\theta+\pi)=-\rho(-\sin\theta)=\rho\sin\theta.$$

这就说明了关系式$(*)$对于 $\rho<0$ 时的情况也是适用的，此外不难看到关系式$(*)$对于 $\rho=0$ 也适用. 由此我们可得到把点的极坐标化为直角坐标的公式:

$$\boxed{x=\rho\cos\theta, \ y=\rho\sin\theta} \qquad (6.1)$$

例 1 把点 A 的极坐标$\left(-\sqrt{2}, \ -\frac{3}{4}\pi\right)$化成直角坐标.

解: 利用公式(6.1)可得

$$x=-\sqrt{2}\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

$$y=-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

$\therefore$ 点 A 的直角坐标是(1, 1).

将公式(6.1)代入曲线的直角坐标方程，就可以把它化为这条曲线的极坐标方程.

例 2 化圆的直角坐标方程 $x^2+(y-r)^2=r^2$ 为极坐标

方程.

解: 将已知方程化为 $x^2+y^2=2ry$. 由公式(6.1)可得

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=2r\rho\sin\theta$$

即

$$\rho^2=2r\rho\sin\theta$$

上式两端同除以 ρ, 得

$$\rho=2r\sin\theta$$

这就是所求的圆的极坐标方程.

注: 一般来说, 我们不能用一个式子去除曲线方程的两端(因为这样做的结果, 有可能使曲线上坐标满足除式为零的方程的点的坐标, 不满足被除后的方程), 在例 **2** 中我们虽然用 ρ 去除方程的两端. 但是由于 $\rho=0$ 的点是极点 O, 极点 O 的极坐标(o, o)满足被除后的方程 $\rho=2r\sin\theta$。所以并不影响我们所要求得的结果.

由公式 (6.1) 还可以得到一个用来化已知点的直角坐标为极坐标的公式:

$$\boxed{\begin{aligned}&\rho^2=x^2+y^2\\&\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},\ (x\neq0,\ \theta\text{ 的终边}\\&\qquad\qquad\text{过点}(x,\ y))\end{aligned}}\qquad(6.2)$$

在一般情况下, 把点的直角坐标化为极坐标时, 只写出满足条件 $\rho\geqslant0$, $0\leqslant\theta<2\pi$ 的极坐标, 且当 $x=0$ 时, 由 y 大于、等于或小于零, 分别取 θ 等于 $\frac{\pi}{2}$、0 或 $\frac{3\pi}{2}$.

例 3 把点 $A(\sqrt{3}, -1)$的直角坐标化为极坐标.

解: 把 $x=\sqrt{3}$, $y=-1$ 代入公式(6.2), 得

$$\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$\because$ 点 $A(\sqrt{3},\ -1)$在第四象限,

$\therefore$ θ 是第四象限的角.

故
$$\theta=\frac{11}{6}\pi$$

因此,点 A 的极坐标是$\left(2,\frac{11}{6}\pi\right)$.

例 4 把已知曲线的极坐标方程 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ 化为直角坐标方程,并指出这条曲线是哪一种曲线.

分析 为了能够应用公式(6.1)和(6.2),需要将极坐标方程进行变形. 由于 ρ 可以通过公式(6.2)进行代换,所以只要将 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 化为 θ 的三角函数就可以了,由于 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$,因此可以使用公式(6.1)进行代换,从而得出我们所要求的方程.

解: $\because$ $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$

$\therefore$ 曲线的极坐标方程可化为

$$\rho^2-2\rho(\cos\theta+\sin\theta)+1=0$$

即
$$\rho^2-2(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)+1=0$$

利用公式(6.1)和(6.2),可得

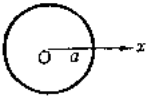
$$x^2+y^2-2(x+y)+1=0$$

即
$$(x-1)^2+(y-1)^2=1.$$

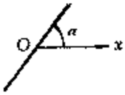
这就是已知曲线的直角坐标方程. 这个方程表示的曲线

是以点(1, 1)为圆心，以1为半径的圆.

下面是几种比较常见的极坐标方程的图形：

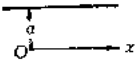


圆 $\rho=a$

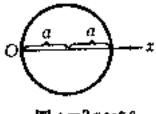


直线 $\theta=\alpha$

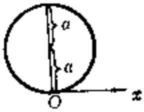
直线 $\rho\cos\theta=a$



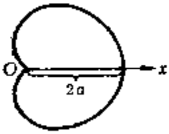
直线 $\rho\sin\theta=a$



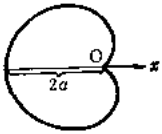
圆 $\rho=2a\cos\theta$



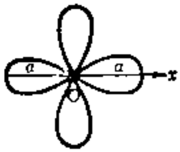
圆 $\rho=2a\sin\theta$



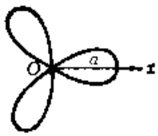
心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$



心脏线 $\rho=a(1-\cos\theta)$

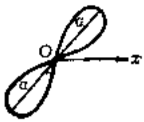


四叶玫瑰线 $\rho=a\cos2\theta$

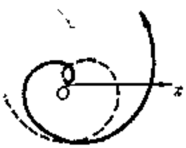


三叶玫瑰线 $\rho=a\cos3\theta$

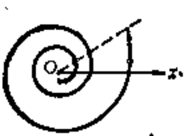
双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta$



双纽线 $\rho^2=a^2\sin2\theta$



螺线 $\rho=a\theta$



对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 或 $\log_a\rho=a\theta$

练 习 题 2

1. 已知各点的极坐标为$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(\sqrt{2},\frac{7}{4}\pi\right)$、$(-3,\pi)$、$\left(-\sqrt{3},-\frac{\pi}{6}\right)$，求它们的直角坐标.

2. 已知各点的直角坐标为$(-1,1)$、$(3,-\sqrt{3})$、$(0,-5)$、$(3,4)$，求它们的极坐标.

3. 把下列直角坐标方程化为极坐标方程:

(1) $y=1$; (2) $x-2y+3=0$; (3) $x^2-y^2=1$; (4) $y^2=2px$.

4. 把下列极坐标方程化为直角坐标方程:

(1) $\rho=1$; (2) $\theta=\frac{\pi}{3}$; (3) $\rho=2\cos\theta$; (4) $\rho=\frac{1}{1-2\cos\theta}$.

三、曲线的极坐标方程

与平面直角坐标系类似，在极坐标系中，如果某曲线C(看作适合某种条件的点的集合或轨迹)上的点与一个二元方程$f(\rho,\theta)=0$之间有如下关系:

1. 以$f(\rho,\theta)=0$的解为坐标的点都在曲线C上;

2. 曲线C上的点所对应的极坐标都满足方程$f(\rho,\theta)=0$.

那么，方程$f(\rho,\theta)=0$叫做曲线C的极坐标方程，而曲线C叫做极坐标方程的曲线.

由此可见，求曲线的极坐标方程的方法和步骤与求曲线的直角坐标方程类似，就是把曲线看作是适合某种条件的点的集合或轨迹，然后按如下的步骤进行:

1. 建立适当的极坐标系，并设所给曲线上的任一点(动点)的极坐标为(ρ,θ);