Jing Guan lei Gao Deng Shu Xue
Jing Guan lei Gao Deng Shu Xue
Jing Guan lei Gao Deng Shu Xue
Jing Guan lei Gao Deng Shu Xue
Jing Guan lei Gao Deng

高等院校
经济管理类教材

高等数学

主　编：王　霞
副主编：赵亚光

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等院校经济管理类教材

高 等 数 学

主　编：王　霞
副主编：赵亚光

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容简介

主要介绍函数、极限、一元函数微分、一元函数积分、Γ函数、简单的空间解析几何知识、二元函数微分、最小二乘法、二重积分、级数、微分方程简单差分方程等.同时介绍函数变化率在经济学中应用的边际分析、弹性分析、求生产中的最大收益的方法,复利问题,用最小二乘法建立经验公式,用级数理论和常微分方程解决经济领域中的实际问题等,突出经济类《高等数学》的"经济类"特色.

本书适合高等院校经济管理类各专业用作教材和参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(经济管理类)/王霞主编.—天津:天津大学出版社,2004.9

ISBN 7-5618-2044-5

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第102006号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 24
字　　数 600千
版　　次 2004年9月第1版
印　　次 2004年9月第1次
印　　数 1-2 000
定　　价 49.00元

前　　言

高等数学是高等院校经济管理类各专业本科生必修的一门重要的基础理论课.本书根据经管类专业数学教学大纲的基本要求撰写而成.在编写过程中参照考研大纲的基本要求,其内容涵盖了所要求的微积分全部内容.

通过经管类高等数学的学习,可以培养与锻炼学生的逻辑思维能力、从实际到理论的抽象思维能力、建立数学模型的实际应用能力,并使学生掌握本门课程的基本理论与基本运算技能,为学习后继课程奠定必要的基础.因此在编写本书时,突出高等数学基本概念、基本理论和基本方法,在有关内容处都比较详细地介绍了高等数学在经济、管理上的应用.例如复利问题,函数变化率在经济学中应用的边际分析、弹性分析、求生产中的最大收益的方法,用最小二乘法建立经验公式,用级数理论和常微分方程知识解决经济领域中的实际问题等,突出了(经济管理类)高等数学的"经管类"特色.

本书由天津科技大学理学院数学教研室王霞(第一、四、五、十一章),赵亚光(第六、七、八章),王玉杰(第二、三、九章),邱玉文(第十章)编写,最后由王霞统稿.

本书由陈则民教授主审.在编写的过程中李伟教授、李海根、吴天毅教授提出许多中肯意见与建议.同时也得到了天津科技大学理学院数学教研室的各位老师的热情帮助,在此一并表示衷心的感谢.

虽然我们尽了努力,但由于水平、经验有限,教材中难免会有这样或那样的缺点和问题,恳请同行和读者不吝指正,我们将万分感谢.

编者

2004 年 5 月

目　录

第一章 函 数

高等数学与初等数学的重要区别是它们的研究对象不同.初等数学研究的主要对象是常量及其运算,而高等数学研究的主要对象是变量之间的依赖关系,即函数.函数是高等数学中最重要的基本概念.本章将在复习有关函数内容的基础上,进一步研究函数的性质,同时介绍经济活动中的一些常用函数.

第一节 实数集

一、集合

1.集合概念

所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体,通常用大写拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不属于 A,记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$.

一个集合,如果它只含有有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种:

1)列举法　把集合的全体元素一一列举出来表示.例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A,可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

2)描述法　若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如,集合 B 是方程 $x^2-8=0$ 的解集,就可表示成

$$B=\{x\mid x^2-8=0\}.$$

作为特殊的数集,全体自然数的集合用 $\mathbf{N}$ 表示,即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$;全体正整数的集合用 $\mathbf{N}^+$ 表示,即 $\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots\}$.

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$;全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,\text{且 }p、q\text{ 互质}\right\}$;全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集合.

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A).如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.例如,设 $A=\{3,2\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,则 $A=B$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subset B$.例如,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集.例如 $\{x\mid x\in\mathbf{R},q\in\mathbf{R}^+\text{ 且 }x^2+q=0\}$ 是空集,因为适合条

件 $x^2+q=0$ 的实数是不存在的.空集记作$\varnothing$,且规定空集$\varnothing$是任何集合 A 的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

2.集合的运算

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

有时,我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集.此时,我们称集合 I 为全集或基本集,称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集,记作 A^C.例如,在实数集 R 中,集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 8\}$ 的余集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x>8\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设 A、B、C 为任意三个集合,则下列法则成立:

1)交换律 $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$;

2)结合律 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

3)分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

4)对偶律(德·摩根定律) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3.区间和邻域

区间是用得较多的一类数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.数集$\{x\mid a<x<b\}$称为开区间,记作(a,b),即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,这里 $a,b\notin(a,b)$.

数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.$a$ 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,这时 $a,b\in[a,b]$.

类似地有$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间.数 $b-a$ 称为这些区间的长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段.闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来,分别如图 1-1(a)、(b)所示.此外还有所谓无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间.例如,$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)、(d)所示.

全体实数的集合 **R** 也可记为$(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为“区间”,且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念,以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一小正数,则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ

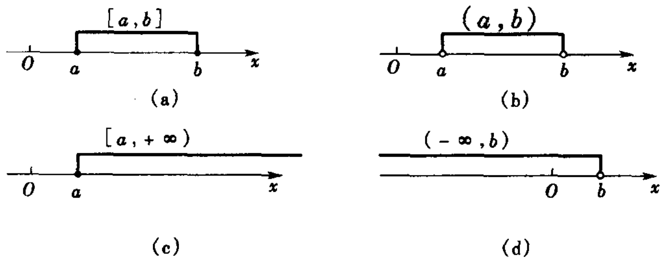

图 1-1

邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径(图 1-2).

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

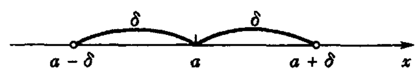

图 1-2

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离,所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$. 这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.例如,1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $U\left(1,\frac{1}{2}\right)=\left\{x \mid \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}=\left\{x \mid |x-1|<\frac{1}{2}\right\}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

二、实数与性质

1. 实数概述

人们对数的认识是逐步深入和发展的.一开始,由于要对劳动成果进行分配和交换必须计数,所以,人类首先产生了自然数,继而发展到整数和有理数.任何有理数都可以表示成一个有限小数,或者一个无限的循环小数;而一个无限不循环的小数称为无理数.有理数和无理数统称为实数.

有理数全体对四则运算是封闭的,即有理数之间的加、减、乘、除的结果还是有理数.所有实数对四则运算也是封闭的,即实数之间的加、减、乘和除的结果还是实数.

通过数轴可将全体实数与数轴上的点之间建立起一一对应关系:每一实数与数轴上的一个点相对应,不同的点对应不同的实数.因此,通常实数轴上的点与实数不加区别.例如,数 $\sqrt{3}$ 与点 $\sqrt{3}$,数 a 与点 a 等.

2. 实数的性质

(1)实数的有序性.实数集合是一个有序集合,任何两个实数可以比较大小.即对任何实数 x 与 y,必定满足下述三个关系之一,$x<y$,$x=y$,$x>y$.

(2)实数的稠密性.任意两个不相等的实数之间有有理数,也有无理数.即任意两个实数之间总存在实数.

(3)实数的代数结构.我们知道,有理数不仅可以进行四则运算,而且这些运算遵从分配

律、交换律、结合律等运算规律，这些运算规律对实数仍然成立.

三、实数的绝对值

1.定义与几何意义

定义 设 x 为一个实数，x 的绝对值(记为 $|x|$)定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0. \end{cases}$$

若 x,y 为两个实数，则由绝对值定义有

$$|x-y|=\begin{cases} x-y, & x>y,\\ 0, & x=y,\\ y-x, & x<y. \end{cases}$$

绝对值的几何意义是：$|x|$ 表示 x 与原点 O 的距离；$|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

2.性质

在应用中常用到关于绝对值的以下性质：

(1) $|x|\geqslant 0$，而 $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $|-x|=|x|$；

(3) $\sqrt{x^2}=|x|$；

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(5) 如果 $a>0$，那么 $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；

如果 $a>0$，那么 $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$；

(6) 对任意实数 x、y，有

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|，称为三角不等式，$$

一般有

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\ (x_i\ 为实数，i=1,2,\cdots,n)；$$

(7) $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|$；

证 因为 $|x|=|x-y+y|\leqslant |x-y|+|y|$，

得 $\quad |x|-|y|\leqslant |x-y|$，

及 $\quad |y|-|x|\leqslant |y-x|=|x-y|$，

所以 $\quad \big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|$.

(8) $|xy|=|x||y|$；

一般 $\quad |x_1x_2\cdots x_n|=|x_1||x_2|\cdots|x_n|$.

(9) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$.

例 1 将 $A=\{x\,|\,x^2+x-6>0\}$ 用区间来表示.

解 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$.

根据所给的不等式，所求两个实数 $x+3$ 和 $x-2$ 同时为正数或者同时为负数，因此 $x>2$ 或者 $x<-3$，得到

$$A=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty).$$

例 2　求解$|x-3|>|2x+1|$.

解　本题的不等式等价于不等式$|x-3|^2>|2x+1|^2$,整理得一元二次不等式$3x^2+10x-8<0$.即$(3x-2)(x+4)<0$.其解集为

$$\{x|3x-2>0且x+4<0\}\cup\{x|3x-2<0且x+4>0\},$$

即

$$\left\{x\,\middle|\,-4<x<\frac{2}{3}\right\}.$$

例 3　解不等式$0<|x-2|\leqslant 2$.

解　不等式$0<|x-2|\leqslant 2$等价于

$$\begin{cases}|x-2|>0,\\|x-2|\leqslant 2,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\neq 2,\\-2\leqslant x-2\leqslant 2,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x\neq 2,\\0\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

其解集为$[0,2)\cup(2,4]$.

习题 1-1

1.下列集合中,哪个是空集?

(1)$A=\{x|x+5=5\}$;(2)$B=\{x|x>5且x<-5\}$;(3)$C=\{x|x^2+5=0;x\in\mathbf{R}\}$.

2.如果$A=\{a,b,c\}$,指出以下表达式中错误的表达式:

(1)$\varnothing\in A$;(2)$a\in A$;(3)$\{a\}<A$;(4)$A\subset A$;(5)$b\subset A$;(6)$b\in A$.

3.如果$A=\{x|3<x<5\}$,$B=\{x|4<x\}$,求$A\cap B$和$A\cup B$.

4.设$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出$A\cup B$,$A\cap B$,$A\setminus B$及$A\setminus(A\setminus B)$的表达式.

5.用区间表示下列集合:

(1)$A=\{x|3<|x|\}$;　　(2)$B=\{x||x-1|<0.1\}$;

(3)$C=\{x|x^2+x-6<0\}$;　　(4)$D=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-3}{x+4}\leqslant 0\right\}$.

6.利用三角不等式证明,对任何实数x,y和z,总有$|z-x|\leqslant|z-y|+|y-x|$.

7.解下列不等式:

(1)$|x|-\pi\geqslant 0$;　　(2)$(x-1)|x-1|>0$;　　(3)$\frac{1}{x}<2$;

(4)$\sqrt{x^2-6x+9}>1$;　　(5)$\frac{x}{x-2}<3$;　　(6)$\frac{x-3}{x+2}<\frac{x+1}{x}$.

第二节　函数概念及常用函数举例

一、函数概念

1.常量与变量

在观察自然现象或生产实践中,常常会遇到各种不同的量,如温度、时间、路程、重量、体

积、速度、压力、物价、利率等.其中有些量在过程中不起变化,也就是保持一定的数值,这种量叫做常量,通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示;还有些量在过程中是变化着的,也就是可以取不同的值,这种量叫做变量,通常用字母 $x,y,t,\cdots$ 表示.

例如,把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积和气体的分子个数保持一定,它们是常量;而气体的温度和压力在变化,则是变量,它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量,要根据具体情况做出具体分析.例如,在一定时间间隔内,某种商品的价格,在计划经济模式中是常量,在市场经济模式中是变量.

高等数学主要研究变量.就变量的种类来看,有些量是瞬间变化的,比如一段时间内打电话的人数、地球上人口总数等,这些量是离散的,还有一些量是连续变化的,比如某一天内温度的变化等.变量之间的关系都可用函数概念来描述.

2.函数概念

中学数学中已经接触过"函数"概念,它是通过一定的对应法则来反映两个变量之间的依赖关系.

定义 设 A 和 B 都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集合,从 A 到 B 的函数关系 f 是这样一种规则:对于 A 中的每一个元素 x,唯一地对应 B 中的一个元素 y.用记号表示 $f:A\rightarrow B$,这时 y 记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.其中 A 称为函数 f 的定义域,记为 $A=D_f$;B 的子集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数的值域,记为 R_f,即 $R_f=f(D_f)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$.也就是说,可以将函数关系看成一种映射,函数 f 将 x 映射成 y、变量 x 称为自变量,变量 y 称为因变量.自变量通常用字母 x 表示,因变量通常用字母 y 表示.但是根据实际问题的需要,它们都可以用其他字母表示.

例如 $x=\varphi(t)$, $u=g(v)$ 等.

表示函数的记号也是可以任意选取的,除了常用的 f 外,还可用其他的英文字母或希腊字母,如"g","F","φ"等表示.相应地,函数可记作 $y=g(x)$, $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$ 等.有时还直接用因变量的记号来表示函数,即把函数记作 $y=y(x)$.在同一问题中,讨论到几个不同的函数时,为了表示区别,需用不同的记号表示.

按照上述的定义,记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的:前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而后者表示与自变量 x 对应的函数值.但为了叙述方便,习惯上常用记号"$f(x),x\in D_f$"或"$y=f(x),x\in D_f$"来表示定义在 D_f 上的函数 f.

函数是从实数集到实数集的映射,其值域总在 $\mathbf{R}$ 内,因此构成函数的要素是:定义域 D_f 及对应法则 f.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则是不同的.例如,对于函数 $y=1+x^2$ 和 $x=1+y^2$,它们的定义域都是 $D_f=\mathbf{R}$,且对于 $\mathbf{R}$ 中任意实数 a,两个函数都有相同的实数 $1+a^2$ 与之对应,即有相同的对应法则.因此,它们是两个相同的函数,但对于函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 与 $y=\dfrac{x}{x(x+1)}$,由于它们的定义域不同,故是两个不同的函数.

3.函数定义域的确定方法

函数定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定.例如,设某商店购进鸡蛋 1 000 公斤,按每公斤 4 元的价格出售,当出售的数量为 x 公斤时,其收益 $R=4x$,x 的取值范围为区间 $[0,1\,000]$,即为实际问题的定义域.另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实

数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

例 1 求函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 因为 $4-x^2\geqslant0$ 的解为 $|x|\leqslant2$,即 $x\in[-2,2]$;$x-1>0$ 的解为 $x>1$,即 $x\in(1,+\infty)$.所以,函数 $f(x)$ 的定义域为

$$D_f=[-2,2]\cap(1,+\infty)=(1,2].$$

在函数定义域中,对每个 $x\in D_f$,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数称为单值函数,否则叫多值函数.以后凡没有特别说明,本书讨论的都是单值函数.

4.函数对应法则表示法

函数对应法则表示法主要有公式法(解析式表示)、表格法、图形法.用图形表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数 $y=f(x),x\in D_f$ 的图形(图 1-3),R_f 表示 $y=f(x)$ 值域.

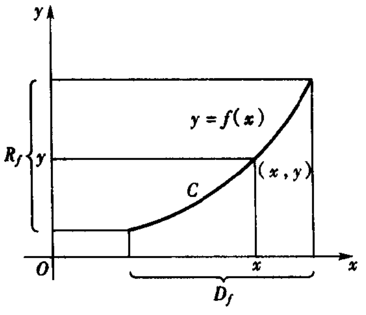

图 1-3

根据实际问题的需要,函数的对应法则除可用直角坐标系下图形表示外,还可以用极坐标系下函数图形来表示.

在平面内取一点 O,叫做极点,自 O 引一条射线 γ,叫做极轴.再选定一个长度单位和角度正向(通常取逆时针方向),这样就建立了一个极坐标系.即用距离和方向来表示平面上的点,它是平面上的点与有序数组的又一种对应关系.

对于平面上任一点 M,用 r 表示线段 OM 的长度,用 θ 表示从 $O\gamma$ 轴到 OM 的角度,r 叫做点 M 的极径,θ 叫做点 M 的极角,有序数对 (r,θ) 就叫做点 M 的极坐标,见图 1-4.

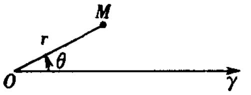

图 1-4

特别强调:r 表示线段 OM 的长度,即由极点 O 到点 M 的距离;θ 表示从 $O\gamma$ 到 OM 的角度,即以 $O\gamma$(极轴)为始边,OM 为终边的角.特别地,当 M 在极点时,它的极坐标 $r=0,\theta$ 可以取任意值.

一般条件下,极径都是正值,为处理问题的便利起见,极径也可以取负值.对于点 $M(r,\theta)$,负极径的规定:作射线 OP,使 $\angle\gamma OP=\theta$;在 OP 的反向延长线上取一点 M',使 $|OM'|=|r|$.

实际上,负极径比正极径多了一个操作,将射线 OP 反向延长,而反向延长也可以说成旋转 π.见图 1-5.

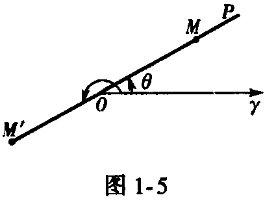

图 1-5

在这种情况下,点 M 的极坐标可以写为 (r,θ) 或 $(-r,\theta\pm\pi)$,这里角度以弧度为单位,π 表示 180°.更一般地,$(r,2k\pi+\theta)$ 与 $(-r,(2k+1)\pi+\theta)(k\in\mathbf{Z})$ 表示同一点 M 的坐标,就是说,在极坐标系中,点与坐标不是一一对应的.如图 1-6 所示,OM 的长度为 4,$\theta=\frac{\pi}{4}$,则由于平面上一点的极坐标不是唯一的,点 M 极坐标有无穷多种表示法.

(1)对于正极径来说,极角和极角之间的关系是相差 $2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.所以 M 的

极坐标表达式是$\left(4,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

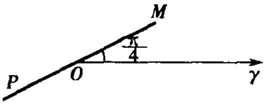

图 1-6

(2)对于负极径来说,极角和极角之间的关系也是相差 $2k\pi$. 负极径为 -4,所以 M 的极坐标表达式是

$$\left(-4,(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如果规定 $\gamma\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi$,则一点仅有一对极坐标(除极点外).

例 2 在极坐标系中画出点 $M\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$的位置.

解 (1)作射线 OP,使$\angle\gamma OP=\frac{\pi}{3}$;

(2)在 OP 的反向延长线上取一点M,使$|OM|=3$(图 1-7).

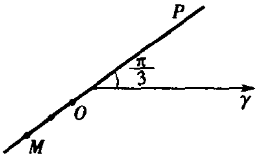

图 1-7

极坐标系和直角坐标系是两种不同的坐标系,现建立这两种坐标系间的关系.把极点作为直角坐标系的原点,极轴作为 x 轴正半轴(图 1-8),于是有

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases}\tag{1}$$

以此可以解得

$$\begin{cases}r=\pm\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\\ \sin\theta=\dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}\tag{2}$$

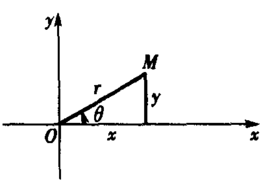

图 1-8

由已知点的直角坐标用式(2)及式(1)求其极坐标,或由已知点的极坐标求其直角坐标,并可以把直角坐标曲线方程化为极坐标曲线方程,或把极坐标曲线方程化为直角坐标曲线方程.

例 3 已知点 P 的极坐标为$P\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$,求它的直角坐标.

解 由式(1)得 $x=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2},y=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$,所以极坐标点 $P\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$的直角坐标为 $P(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

例 4 已知点 M 的直角坐标为$M(0,-4)$,求其极坐标.

解 由(2)式得 $r=4,\cos\theta=0$.由于 $y=-4$,所以 $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

由已知直角坐标求极坐标时,一般限定 $r\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi$.

例 5 设圆心 C 的极坐标为(b,α),半径为 R,圆周上任意一点 P 的极坐标为(r,θ),求圆的极坐标方程.

解 如图 1-9 所示.

根据余弦定理有

$$r^2+b^2-2br\cos(\theta-\alpha)=R^2,\tag{3}$$

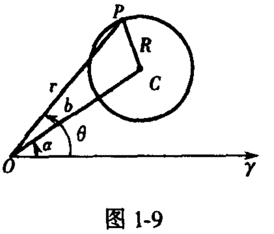

图 1-9

这就是圆心位于点 C 半径为R 的圆所满足的方程.

(1)若极点为圆心,即 $b=0$,则方程为 $r=R$;

(2)如果圆周通过极点,则 $b=R$,圆的方程式(3)变为 $r=2R\cos(\theta-\alpha)$;

(3)如果圆周通过极点,而且圆心在极轴上,那么 $b=R$ 且 $\alpha=0$,则圆的方程式(3)变为 $r=2R\cos\theta$;

(4)如果极轴与圆相切,切点为极点,这时 $b=R$ 且 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,则圆的方程为 $r=2R\sin\theta$.

例 6 把极坐标方程 $r=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 化成直角坐标方程.

解
$$r=\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta,$$
$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,$$
两边同乘以 r,得
$$r^2=\frac{\sqrt{2}}{2}(r\cos\theta)+\frac{\sqrt{2}}{2}(r\sin\theta),$$
$$x^2+y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y,$$
所以
$$x^2+y^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=0.$$

例 7 把直角坐标方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 化为极坐标方程.

解 由式(1)得
$$r^2-2ar\cos\theta=0,r(r-2a\cos\theta)=0,$$
即
$$r=0 \text{ 或 } r=2a\cos\theta.$$

二、常用函数举例

例 8 函数 $y=2$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{2\}$,在直角坐标系下,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 1-10.

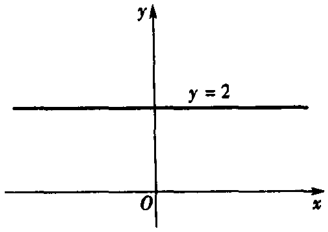

图 1-10

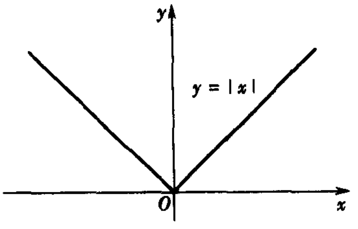

图 1-11

例 9 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-11.这个函数称为绝对值函数.

例 10 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 称为符号函数,它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1-12 所示.对任何实数 x,下列关系式

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

成立.

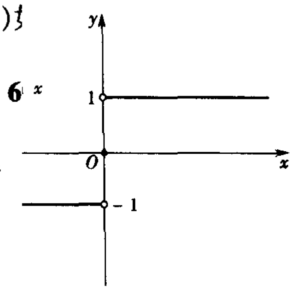

图 1-12

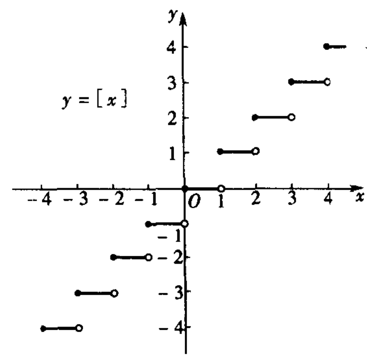

图 1-13

例 11 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$.例如,$\left[\frac{7}{9}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4$.把 x 看作变量,则函数 $y=[x]$的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$.它的图形如图 1-13 所示.该图形称为阶梯曲线.在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跳跃度为 1.这个函数称为取整函数.

例 12 函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 是一个分段函数(在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数).它的定义域是 $D_f=[0,+\infty)$.

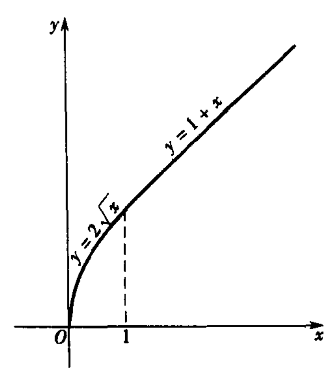

图 1-14

当 $x\in[0,1]$时,对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$;当 $x\in(1,+\infty)$时,对应的函数值 $f(x)=1+x$.

例如,$\frac{1}{2}\in[0,1]$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$;

$1\in[0,1]$,所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$;

$3\in(1,+\infty)$,所以 $f(3)=1+3=4$.这个函数的图形如图 1-14.

习题 1-2

1.判断下列函数对是否相同,并说明理由:

(1)$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;

(2)$y=f(x)$与 $x=f(y)$;

(3)$y=x$ 与 $y=(\sqrt[4]{x})^4$;

(4)$y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$与 $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

2.求下列函数定义域：

(1)$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(2)$y=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；

(3)$y=\sqrt{\frac{x-2}{x^2-2x-3}}$；

(4)$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-3}, & x<0,\\ \sqrt{x+1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

3.求函数值 $f(0),f(-1),f(1.5),f(-1.5),f(1+a)$.

(1)$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & |x|>1;\end{cases}$

(2)$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ 2x+3, & x>1.\end{cases}$

4.设 $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\neq -1)$，求 $f\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

5.设 $f(x-1)=x(x-1)$，求 $f(x)$.

6.画出下列各极坐标所表示的点，并分别求出这些点的直角坐标：

(1)$\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$；(2)$(2,0)$；(3)$\left(6,-\frac{6}{5}\pi\right)$；(4)$\left(-4,\frac{\pi}{8}\right)$；(5)$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

7.判断下列方程所表示的曲线，并画出其图形：

(1)$r=\frac{5}{3-\cos\theta}$；　(2)$r=\frac{-3}{\cos\theta-1}$；

(3)$r=a\theta\ a>0$；　(4)$r=a\sin 3\theta$.

8.将下列曲线的极坐标方程化为直角坐标方程：

(1)$r=2\cos\theta+3\sin\theta$；　(2)$r=a\theta$；

(3)$r=\frac{3}{2+3\sin\theta}$；　(4)$r=a\cos 2\theta$.

9.将下列曲线的直角坐标方程化为极坐标方程：

(1)$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$；　(2)$x-3y=0$；

(3)$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$；　(4)$x^2+y^2+ax+by+c=0$.

第三节　函数的性质与反函数

本节介绍函数的几种性质与反函数的概念.

一、函数的性质

1.函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，数集 $I\subseteq D_f$，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，都