21世纪高职高专教育系列规划教材 · 公共基础课

21SHIJI GAOZHI GAOZHUAN JIAOYU XILIEGUIHUA JIAOCAI • GONGGONGJICHUKE

高等数学实训教程

《理科》

主　编　胡红亮

副主编　崔永红　李陆军

EXERCISES COURSE ADVANCED MATHEMATICS

EXERCISES COURSE ADVANCED MATHEMATICS

西北大学出版社

NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21世纪高职高专教育系列规划教材·公共基础课

高等数学实训教程

（理　科）

主　编　胡红亮

副主编　崔永红　李陆军

西北大学出版社

中国·西安

图书在版编目(CIP)数据

高等数学实训教程．理科/胡红亮主编．—西安:西北大学出版社，2004.8

ISBN 7-5604-1959-3

Ⅰ.高… Ⅱ.胡… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第082893号

高等数学实训教程·理科

出版发行	西北大学出版社		社	址	西安市太白北路229号
电	话	029-88302590	经	销	新华书店经销
印	刷	陕西丰源印务有限公司	版	次	2004年8月第1版
开	本	787×1092 1/16	印	次	2005年8月第2次印刷
字	数	196千字	印	张	8.5
书	号	ISBN 7-5604-1959-3/O·118	定	价	15.00元

内容提要

本书是岳忠玉、张绪绪主编的陕西省高职高专规划教材《高等数学》(理科)的配套辅导教材,按照《高等数学》(理科)教材的十章顺序编写。包括了函数、极限和连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程,空间解析几何,多元函数微分学,重积分和无穷级数等内容。每部分设置了“知识要点”、“例题选讲”和“训练与提高”三部分内容。书后附有习题答案或提示。该书在内容编排上力求所选例题典型,着重加强数学基础知识的理解和掌握,并在此基础上进行一定程度的提高。

本书内容具有相对的独立性,除可作为陕西省高职高专规划教材《高等数学》(理科)的配套辅导教材外,还可单独用于其他高职高专和各类成人高校《高等数学》(理科)的辅导教材。

前　言

2002年在陕西省教育厅高教处的统一安排下，由陕西省内部分高职高专院校共同编写了陕西省高职高专规划教材《高等数学》(理科)。在两年的使用中，任课教师和学生普遍反映适用于高职高专的《高等数学》(理科)的辅导材料太少。基于这一实际的情况，我们又编写了这本与之配套的《高等数学实训教程(理科)》。

编写时按照《高等数学》(理科)的顺序共分了十章，每章设置"知识要点"、"例题选讲"和"训练与提高"等三部分内容。其中"知识要点"是让学习者知晓一章的主要知识点，做到心中有数；"例题选讲"精心选编具有代表性的题目加以分析和解答，使学习者一方面牢固掌握基本概念、基本方法和基本技能，另一方面有利于所学知识的深化和提高；"训练与提高"精选了适当数量的习题以供学习者训练之用。

这本辅导教材以陕西省高职高专规划教材《高等数学》(理科)为编写依据，遵照《高职高专教育数学课程教学基本要求》，以够用、必需为原则，整体结构力求严谨简明；内容的深度和范围力求"宽编窄用"；语言表述力求通俗易懂。

参加本书编写工作的有：西安航空职业技术学院张春玲(第一章)、西安铁路运输职工大学李慧玲(第二章)、陕西职业技术学院崔永红(第三章)、陕西国防工业职业技术学院成均孝(第四章)、陕西国防工业职业技术学院杨爱云(第五章)、陕西交通职业技术学院王子燕(第六章)、渭南铁路工程职业技术学院王新奇(第七章)、西安航空职业技术学院李陆军(第八章)、西安航空技术高等专科学校胡红亮(第九章)、西安航空技术高等专科学校赵芳玲(第十章)。本教材由胡红亮拟定编写大纲和最终的统稿和定稿。

本教材由岳忠玉主审，提出了许多宝贵的建议和意见，在此表示衷心的感谢。另外，赵芳玲也承担了部分章节的校对和统稿工作，在此一并表示感谢。

由于作者们水平有限，书中的错误和不妥之处，敬请学习者和同行批评指正。

编　者

2004年4月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

知识要点

1.函数的定义、两个要素 —— 定义域和对应法则、函数的表示法；

2.函数的重要属性：有界性、单调性、奇偶性、周期性；

3.基本初等函数、初等函数；

4.反函数、复合函数、分段函数；

5.数列的极限；

6.函数的极限：x 趋向于无穷大时的极限、函数在一点的极限、左右极限和极限存在的充分必要条件；

7.极限的运算：极限的四则运算法则、两个重要极限；

8.无穷小量和无穷大量的概念、无穷小的性质和无穷小量的阶的比较；

9.函数连续的概念、函数连续的性质；

10.函数的间断点及其分类；

11.闭区间上的连续函数的性质 —— 最大最小值定理、介值定理.

例题选讲

例 1　求函数

$$y = \sqrt{16 - x^2} + \arcsin\frac{2x - 1}{7} + \frac{\sqrt{\ln(x - 1)}}{x(x - 3)}$$

的定义域.

分析　这是三个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域.然后求出其公共部分即可.

解　要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0 \\ \left|\dfrac{2x - 1}{7}\right| \leqslant 1 \\ \ln(x - 1) \geqslant 0 \\ x - 1 > 0 \\ x(x - 3) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leqslant 4 \\ -3 \leqslant x \leqslant 4 \\ x - 1 \geqslant 1 \\ x > 1 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ -3 \leqslant x \leqslant 4 \\ x \geqslant 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

其交集为$[2,3) \cup (3,4]$.

故函数的定义域为$[2,3) \cup (3,4]$.

总结　求函数的定义域时应该注意以下几点：

(1) 若函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零；

(2) 若函数的表达式中含有偶次方根,则根式下的表达式必须非负;

(3) 若函数的表达式中含有对数,则真数必须大于零;

(4) 若函数的表达式中含有 $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$,则必须满足 $|\varphi(x)| \leq 1$;

(5) 若函数是由几个函数经过四则运算构成的,其定义域是各个函数定义域之交集;

(6) 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围之并集.

例 2 判断函数 $f(x) = F(x)\left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.(其中:$a > 0$ 且 $a \neq 1$,$F(x)$ 是奇函数)

分析 先判断 $\left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}\right)$ 的奇偶性,然后才能判断 $f(x)$ 的奇偶性.

解 令 $g(x) = \frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}$

由于
$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1+a^x} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1+a^x-1}{1+a^x} - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

又由题意知 $F(x)$ 为奇函数,故 $f(x) = F(x) \cdot g(x)$ 是偶函数.

总结 判断函数奇偶性的方法主要是根据定义及奇偶函数的运算性质.

(1) 若 $f(-x) = f(x)$,则函数 $f(x)$ 为偶函数;

(2) 若 $f(-x) = -f(x)$,则函数 $f(x)$ 为奇函数;

(3) 两个奇函数之和是奇函数;两个偶函数之和是偶函数;奇函数与偶函数之和是非奇非偶函数;

(4) 两个奇函数的乘积是偶函数;两个偶函数的乘积是偶函数;奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

例 3 设 $f(x) = 2x - 1$,$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$,求 $f(x+1)$,$g\left(\frac{1}{x}\right)$,$f[g(x)]$,$g[f(x)+2]$.

分析 本题的对应法则为

$$f(*) = 2(*) - 1, g(*) = \frac{1}{1+(*)^2}$$

解 $f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x + 1$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f[g(x)] = 2[g(x)] - 1 = 2\left[\frac{1}{1+x^2}\right] - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1$$

$$\begin{aligned} g[f(x)+2] &= \frac{1}{1+[f(x)+2]^2} \\ &= \frac{1}{1+[(2x-1)+2]^2} = \frac{1}{1+(2x+1)^2} \end{aligned}$$

总结　解此类题可归为求自变量取不同值时所对应的函数值.这时,只要搞清楚对应法则,问题就迎刃而解了.

例4　设$f\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$,求$f(x)$.

分析　可考虑用变量代换法或根据所给表达式进行直接"拼凑".

解法1　变量代换法

令$\frac{x+1}{x}=t$

将　$x=\frac{1}{t-1}$代入原式得

$$f(t)=\frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}=t^2-t+1$$

再将t换成x得

$$f(x)=x^2-x+1.$$

解法2　直接拼凑法

因为　$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$

即　$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-1+1$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\left(1+\frac{1}{x}\right)+1$$

于是　$f(x)=x^2-x+1$

总结　本题是已知$f[g(x)]$的表达式,反求$f(x)$表达式.解此类题的一般思路是令$g(x)=t$解出$x=\varphi(t)$,求出$f(t)$的表达式,再将t换成x即得$f(x)$的表达式.也可以用直接拼凑法求解.

例5　求下列各数列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

分析(1)　这是一个"$\frac{\infty}{\infty}$"型极限,用分子、分母中n的最高次项(不包括系数)同除分子、分母,可将无穷小分出,然后用极限四则运算法则即可.

解法1　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$

分析(2)　此极限呈"$\infty-\infty$"型不定式极限,需先将其有理化后,再求极限.

解法2　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = 0$$

分析(3)　本题需先找到数列前 n 项和的解析式，然后再求极限.

解法3　因为$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

所以$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

总结　数列的极限最常见的题型是“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限(或可转化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型).求这种形式的极限的方法是:用分子、分母中 n 的最高次项(不包括系数)同除以分子、分母,然后根据极限四则运算法则求极限即可.

例6　求极限$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + \ln(2-x)}{4\arctan x}$

分析　由于函数$f(x) = \frac{x^2 + \ln(2-x)}{4\arctan x}$在$x = 1$处连续,所以可利用函数的连续性求极限.

解　由于　$f(x) = \frac{x^2 + \ln(2-x)}{4\arctan x}$在$x = 1$处连续

则　原式 $= f(1) = \frac{1^2 + \ln(2-1)}{4\arctan 1} = \frac{1}{\pi}$.

总结　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,可根据$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 求极限.

例7　求极限$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

分析　本题是“$\frac{0}{0}$”型极限,可先通过分解因式约去致零因子,再求极限.

解　原式 $= \lim\limits_{x \to -2} \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}$

例8　求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

分析　本题是“$\frac{0}{0}$”型极限,可先通过分子、分母的有理化,消去致零因子,再求极

限.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{3}{2}$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

分析　本题是"$\dfrac{0}{0}$"型极限,当 $x\to\pi$ 时,有 $\pi-x\to0$,可先作变量代换,然后用第一重要极限求解.

解　令 $\pi-x=t$,则 $x=\pi-t$

当 $x\to\pi$ 时,$t\to0$

则 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

例 10　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

分析　本题是"$\dfrac{0}{0}$"型极限,由于 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\sin x\sim x$,所以可利用无穷小等价代换求极限.

解　因为当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\sin x\sim x$

所以　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\dfrac{1}{2}$

总结　我们看出,例 7、8、9、10 题都是"$\dfrac{0}{0}$"型极限,这种情形下求极限常用的方法有:

(1) 约去致零因子法

当函数是有理分式时,可通过分解因式法消去使分母为零的因式,再求极限;

当函数是无理分式时,可通过有理化法消去使分母为零的因式,再求极限.

(2) 利用第一重要极限法

当函数中含有三角函数时,往往可通过三角恒等变形,再利用第一重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限.

(3) 利用无穷小等价代换法

当 $x\to0$ 时,常用等价无穷小有:

$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq0)$

注意:　此方法只能在乘积和商中进行,不能在加减运算中代换,否则会导致错误结论.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$是错误的，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^2}=\dfrac{1}{2}$才是正确的.

例 11 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$； (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

分析 这两小题均是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型极限，可先将分子分母分别除以分式中 x 的最高次幂，再求极限.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\frac{3}{x})^{20}\cdot(3+\frac{2}{x})^{30}}{(5+\frac{1}{x})^{50}}=\dfrac{2^{20}\cdot 3^{30}}{5^{50}}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=1$

总结 求"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型函数的极限，可先将分子分母同除以分式中 x 的最高次幂，再求极限.有以下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_n} & \text{当 } m=n \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m<n \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } m>n \text{ 时}\end{cases}$$

例 12 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

分析 这两小题均为"$\infty-\infty$"型极限，需先进行初等变形，再求极限.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{x^2+x+1}=-1$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

总结 求“$\infty - \infty$”型的极限，一般可通过“通分”或“有理化”等方法化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”的形式，再求极限.

例 13 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$

分析 由于(1)题是“1^∞”型，第2小题用对数的性质变形后也是“1^∞”型，所以可考虑利用第二重要极限求解.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1+x}{-2x}}\right)^{\frac{1+x}{-2x}}\right]^{\frac{-2}{1+x}} = e^{-2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$

$$= \lim_{x\to\infty}(x+1)\ln\frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$$

$$= \ln e = 1$$

总结 当函数中有幂指函数时，往往会出现“1^∞”型，这时可通过适当变形化为$(1+x)^{\frac{1}{x}}$或$\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$的形式，然后利用第二重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$或$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$来计算.

例 14 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\cos\frac{1}{x-\pi}$

分析 在这两小题中，极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$和$\lim\limits_{x\to\pi}\cos\frac{1}{x-\pi}$均不存在，但函数$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$和$\cos\frac{1}{x-\pi}$均为有界函数，又由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$，$\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$，所以可利用无穷小的性质计算.

解 (1) 由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$，而$\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right| < 1$

则原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

(2) 由于$\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$，而$\left|\cos\frac{1}{x-\pi}\right| \leqslant 1$

则原式 $= 0$

总结 求无穷小与有界函数之积的极限时，可利用“无穷小与有界函数之积仍为无穷小”的性质进行计算.

例 15 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-1} & x<0\\ 0 & x=0\\ x & 0<x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\end{cases}$，求函数在分段点处的极限.

分析 求分段函数在分段点处的极限时，应先考察函数在该点的左、右极限.

解 在分段点 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0$$

因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x)$$

故$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

在分段点 $x=1$ 处

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}1=1$$

因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=1$$

故$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$

总结 求分段函数的极限，主要是对分段点处函数极限的讨论.一般地，先求出函数在分段点处的左、右极限，再根据

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

来确定函数在 x_0 点的极限是否存在以及极限值.

例 16 讨论所给函数 $f(x)$ 的连续性，若有间断点，指出间断点的类型.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x<0\\ \dfrac{1}{2} & x\neq0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$$

分析 由于初等函数在它们的定义区间内都是连续的，所以本题只需判断在分段点 $x=0$ 处函数是否连续即可.

解 当 $x<0$ 或 $x>0$ 时，$f(x)$ 为初等函数是连续的，在 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+1)=1$$

因为当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限存在但不相等，即$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点且是跳跃型间断点.

故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

总结 因为初等函数在它们的定义区间内总是连续的,所以函数连续性的讨论主要是指分段函数在分段点处的讨论.根据函数在一点处连续的定义可知,$f(x)$ 在 x_0 处连续必须满足下面三个条件:

(1) $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义,即 $f(x_0)$ 存在;

(2) 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的极限存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

不满足上面三个条件之一的点,就是函数的间断点.

如果在间断点 x_0 处,函数 $f(x)$ 的左、右极限都存在,则 x_0 属于第一类间断点.其中左、右极限相等的点是可去间断点,左、右极限不相等的点是跳跃间断点.

如果在间断点 x_0 处,函数 $f(x)$ 的左、右极限中至少有一个不存在,则 x_0 属第二类间断点.

例 17 (1) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})=\dfrac{1}{6}$,求 a.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$,求 a、b.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(9-a)x^2+x-1}{3x+\sqrt{ax^2-x+1}}$

要使上面的极限存在,分子中 x^2 的系数应等于零.

即 $9-a=0$, 得 $a=9$

(2) 因为 $x\to1$ 时,分母的极限为零,而函数的极限存在,由此知函数分子的极限也必定为零.

即 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=a+b+1=0$

得 $b=-a-1$

从而有 $x^2+ax+b=x^2+ax+(-a-1)=(x-1)(x+1+a)$

故 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1+a)}{1-x}=-\lim\limits_{x\to1}(x+1+a)=-a-2.$

由题意知 $-a-2=5$

于是 $a=-7, b=-1-a=6$

例 18 试确定 a、b,使函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant 0\\ x^2+a & 0<x<1\\ bx & x\geqslant 1\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 因为初等函数在其定义域内是连续的,所以在 $(-\infty,0)$,$(0,1)$,$(1,+\infty)$ 三个区间内 $f(x)$ 连续,因而欲使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,只需讨论在 $x=0$ 及 $x=1$ 处的情形即可.

在分段点 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+a) = a$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$　得　$a = 2$

在分段点 $x = 1$ 处

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+a) = 1+a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} bx = b$$

由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

得　$1 + a = b$

联立 $\begin{cases} a = 2 \\ 1 + a = b \end{cases}$　解得 $a = 2, b = 3$

故当 $a = 2, b = 3$ 时,函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

训练与提高

一、判断题

(1) 在 xoy 平面上 $y = e^{-x}$ 的图形与 $y = e^x$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.　(　　)

(2) 函数 $y = x^2, x \in (0, +\infty)$ 是偶函数.　(　　)

(3) 函数 $y = \dfrac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是有界函数.　(　　)

(4) 如果函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处无定义,则 $f(x)$ 在该点无极限.　(　　)

(5) 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在该点的极限必存在.　(　　)

(6) 两个无穷大之和仍为无穷大.　(　　)

(7) 无界函数必是无穷大量.　(　　)

(8) 方程 $x^3 - 3x = 2$ 至少有一个根介于 1 与 3 之间.　(　　)

二、选择题

(1) 下列各组函数中,表示同一个函数的是(　　).

(A) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

(B) $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 与 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

(C) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$

(D) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$

(2) 函数 $y = e^x - 1$ 的反函数是(　　).

(A) $y = \ln x + 1$　　(B) $y = \ln x - 1$

(C) $y = \ln(x + 1)$　　(D) $y = \ln(x - 1)$

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,则下列极限成立的是(

(A) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

(B) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$

(4) 函数 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 有定义

(B) 极限存在

(C) 左极限存在

(D) 右极限存在

(5) 若 $f(x)=\dfrac{1-x}{2(1+x)}$, $g(x)=1-\sqrt{x}$, 则当 $x\to 1$ 时有(　　).

(A) $f(x)=o[g(x)]$

(B) $g(x)=o[f(x)]$

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小

(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小

(6) 下列结论中错误的是(　　).

(A) 10^{1000} 不是无穷大

(B) 当 $x\to\infty$ 时, $x\cdot\cos x$ 是无穷大

(C) 当 $x\to 0^{+}$ 时, $\ln x$ 不是无穷小

(D) 当 $x\to 0$ 时, $2x\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小

(7) 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是函数在 x_0 处连续的(　　).

(A) 必要条件

(B) 充分条件

(C) 充要条件

(D) 无关条件

(8) 函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & x\geqslant 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 左连续

(B) 右连续

(C) 连续

(D) 左、右皆不连续

(9) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在(　　).

(A) $x=0$, $x=1$ 处都间断

(B) $x=0$, $x=1$ 处都连续

(C) $x=0$ 处间断, $x=1$ 处连续

(D) $x=0$ 处连续, $x=1$ 处间断

(10) 函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & 0<x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在 $x=1$ 处间断是因为(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义

(B) $\lim\limits_{x\to 1^{-}}f(x)$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to 1^{+}}f(x)$ 不存在

(D) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在

三、填空题

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ 的连续区间是________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}e^{x} & x<0\\ k & x=0\\ \dfrac{1}{x}\sin x & x>0\end{cases}$, 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在, 则 $k=$ ________.