

INTERMEDIATE
ELEMENTARY MATHEMATICS

by W. H. Hsiang

中级基础数学

项文涵 著

上海科学技术文献出版社

INTERMEDIATE
ELEMENTARY MATHEMATICS

by W.H. Hsiang

中级基础数学

项文涵 著

上海科学技术文献出版社

(沪) 新登字 301 号

INTERMEDIATE ELEMENTARY MATHEMATICS

中级基础数学

项文涵 著

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号 邮政编码 200031)

上海科学技术文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张 23 字数 589,000

1994 年 4 月第 1 版 1994 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1-400

ISBN 7-5439-0497-7/O·097

定 价: 48.00 元

中級基礎數學

蘇步青題





作者简介

项文涵,祖籍中国浙江省瑞安县,1954 年出生于台湾。1976 年毕业于美国柏克莱大学,1980 年获美国俄亥俄州立大学数学硕士学位,后在美国路易斯安那州立大学通过博士资格与语言考试。曾任俄亥俄州立大学数学系助教,台湾淡江大学数学系讲师。1986 年移居加拿大,即从事著书及研究工作。1992 年受中国科技大学聘任教授,但不幸因病未能成行,旋即逝世于加拿大,年仅 38 岁。其遗作除《中级基础数学》外,尚有《基础数学论文集》一书及 40 余篇论文未出版。

代 序

本书的目的，如著者自序中言及，是提供给从事中学数学教育的老师、科学工作者、对数学有兴趣的人士以及有志将来从事数学研究的学生们的一种可常置左右有参考价值的读物。内容自欧几里得几何学开始，叙述主要定理，其证明及有关应注意诸事项，包括方程式论、微积分、级数论、整数论、集合论和点集拓扑学的基础知识。

本书虽包罗广阔，但非节录或译集他书所成，其中包括不少诸多数学杂志中出现过的已知定理或问题的隽永解答，自然也包含了不少著者的创见。收容习题丰富，而且作了适当的分类。

本书是以英文为主体写成的，在适当的地方附有中文说明，致使体例上有些奇异感，著者说这是由于数学名词的中译非但不一致而且尚有值得商榷之处。另一方面可能是著者知道这十多年来中国来美国留学的学生们，初期对英文的数学名词都不熟识，甚至考试时因看不懂或者看错题目而吃大亏，希望为国内同学有机会接触英文数学书，提供一座桥梁，当亦为著述本书动机之一。

著者项文涵先生在台湾、美国两地受教育，亦在此两地教学多年，在实、泛函分析的分野发表过不少论文，原已决定于 1992 年秋回中国任教，在准备回国期间不幸得病去世，英年早逝，至深痛惜。本书非成于一年半载，但系于回国前完成，准备携回作教学之用，不幸持志而逝。读者只略翻阅本书，即可发现随处都有花费不少心血写成的痕迹。

最后要提醒读者的，本书除数学内容外，志在使读者习得数学的英语表现法，读者在觉得能理解自如，不需再查字典之后，尤望试图阅读进一步之英语数学书，学习其表达法，如认为通晓本书英语之后，则读写两方都能应付，这恐怕不是原著者的希望。

霍崇熙

于美国密执安州立韦恩大学

一九九三年一月

鸣 谢

本书的出版，使我可以告慰本书作者——吾儿项文涵了。他若九泉有知，一定会高兴的。

他从小受其父亲项黼宸先生（已故原台湾中央研究院院士、知名数学家、中山奖及学术著作奖得奖人）的薰陶，他思路敏捷，天资聪慧，虚心好学，刻苦用功。早年于美国大学毕业，并获硕士学位后，即埋首于数学研究，苦苦探求追索，不畏清苦。在国外发表了 10 多篇论文。可惜他辛劳恙病，英年早逝，留下遗作《中级基础数学》和《基础数学论文集》及 40 余篇论文未及面世，令文涵儿抱恨终天。

依照吾儿临终时要将他的遗作在中国出版的遗愿，我从侨居地远涉重洋，返回祖国。承蒙上海市归国华侨联合会文化宣传部有关人士的帮助与支持，复旦大学数学系各位学者以及数学研究所《数学年刊》编辑部同仁的鼎力相助，悉心审稿和编排。特别是得到复旦大学名誉校长、中国科学院院士苏步青先生的关心，并为本书挥笔题书名；以及远在美国的数学家霍崇熙教授亲笔作序，使本书得以正式出版，让文涵儿终于有瞑目的一天。谨此深表谢意。

项王晓云

1993 年 9 月

作 者 原 序

数学自古有之，其发展划分为两个时期。以现代观点而言，希腊人与巴比伦人的几何学与代数学属离散型数学 (Discrete mathematics)。自微积分发明后，才有明显的连续概念 (Concept of continuity)。当今世界数学发展的主流为抽象或公理化数学 (Abstract or axiomatic mathematics)。这种数学亦可称为学院派数学或形式数学 (Academic or formal mathematics)，因其充斥了符号，专有名词与艰深的观念，符合外行人对数学的想像。坦言之，这种数学徒具数学的形式，而不一定具有数学的真髓。评鉴数学发明有许多标准，好的发明或结果必定符合这些标准的一部分。并非抽象即可涵盖所有优点。如果说数学的构成元素只是抽象 (Abstraction)、公设 (Axioms)、证明 (Proof)、估计 (Approximation 或 Computation)，则应至少再包含工具、图形、实际应用三元素。如果说数学的制造只是由假设 (Definition 或 Assumption 或 Hypothesis) 经过基本逻辑规则 (如 If $\cdots$ then, If and only if, Not 等) 的运算、计算和揉合已知结果到建立新结果的死板过程，那么数学将毫无活力，对人类毫无用处可言。由极小的灵感 (Idea) 或单一的结果而造成极其艰深繁琐的理论蔚为风尚。古人说“冰冻三尺非一日之寒”。数学的发展亟思建立正确的方向。

这本书乃出于作者以上的觉悟。暂置理论的探索于一旁，而重温基础数学。所采取的结果绝不出自书籍或题目集，而是采取论文中简短、扼要而一针见血者。包括重要结果的简单证明，有趣问题的简单解答，古老方法的改良及许多崭新的结果。凡有作者创见或发现的结果，皆成论文而大部分未列入本书。每章并编列大量习题。这些习题都是各期刊上近年来所设计的问题、论文中的结果或例题、著名问题 (也出现在各章例题中)、或作者自己想出来的问题。其特点为新颖，灵活，重了解与技巧。正文与习题都做简单的分类，便于读者阅读。作者希望本书不但对数学家的研究与教学有用，对其他专业人士 (如科学家，工程师或对数学有兴趣者) 也有参考的价值。

数学发展是人类心灵活动的一环。从基本的题材上，我们更能体会西方人思考的方式与形态。这是当今世界上有先进国与落后国的根本原因。西方的科学发轫于极早期，经过数千年的酝酿，演化与改进，才由希腊人的直观型数学发展成今天的形式。中、西方的早期科学差距不大，中国甚且超越于前。真正的差距是始于产业革命 (industrial revolution)；至今四百年，累积了大量的宝贵经验、构想、观念与技术。这是西方人领先世界的本钱。以上的体会在研究高深数学中即难得到，因为高深数学会使读者集中心力去读懂它，而无暇顾及其真髓。更有甚者，古人对自然界的观察远比现代人 (尤其是都市人) 更敏锐与仔细，而且对大自然有虔诚崇敬之心。不论是一草、一木，或深邃、神秘的星空，都有很多智慧的见解。现代人忙碌于无事之中，追逐于现实利益之际，是无法具有前人那种“无所为而为”的胸襟与气度。

由于数学名词的中译非但不一致，而且值得商榷*。为了适合读者，本书的主体是用英文

写的，附上中文序言，目次，各章摘要与名词索引。习题解答附在书的最后，以使读者能先思考问题。本书纯为创作，而非翻译任何一本外文著作，再加上中文部分。

“实际需要 (或实践) 刺激创造发明”，否则岂非空中楼阁，无法验证 **。希望大家共勉，创造更有价值的数学。疏漏错误在所难免。希望专家读者不吝指正。

项文涵谨识

* 关于名词中译，请参阅第三章抛物线的讨论。投，抛，掷，丢四个字，似乎只有投是真正往上的动作。其余三个字都或多或少有向下或平行的动作。抛物线的原生体为开口向下 (此为中文译名的由来，所以投物线或许较恰当)，其余开口向上，向左或向右为衍生体。读者查阅字典，可以发现 Parabola 与 Parachute(降落伞) 有同样的字首 Para-，故两字应出同源。本书的名词中译以意译为主。

** 科学理论的验证在于其能准确预估 (自然的或社会的) 现象。举例来说，富氏级数 (Fourier series) 有悠久的历史，发展出许多复杂的收敛定理 (Convergence theorems)。如果一不规则函数 (Non-regular function) 满足某一收敛定理的所有假设条件而其富氏级数却不收敛，则此收敛定理不具验证性。一般理论数学结果的验证性都很低。

注：本书取材于本世纪以来的基础数学论文。由于篇数过多且为了节省篇幅起见，不编列参考文献。有兴趣的读者可于著名期刊上找到论文原文或相关论文。本书包含摘要，数学结果与习题三部分，并绘制大量图形与利用工具 (直尺、圆规、分度器、电子计算机) 辅助读者了解数学。侧重于方法 (Methods) 与技巧 (Techniques) 俾使读者在各专业上有所应用。

Contents (目次)

Chapter I. Trigonometry and Analytic Geometry (第一章 三角与解析几何) (1)

A1. Similarity and congruence of triangles (三角形的相似与全等)

A2. Law of cosines (余弦律)

A3. Proof of $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ (正弦和角与差角公式的证明)

A4. Formulae of angle sum for sine, cosine and tangent (正弦, 余弦与正切的和角公式)

A5. Half-angle formula of tangent (正切半角公式)

A6. Identities of sines and area of triangle (正弦等式与三角形面积)

A7. Derivation of area formula from two intersecting circles (从相交两圆导出面积公式)

A8. Area = perimeter in triangles (三角形面积 = 周长的充分必要条件)

B1. Modern criteria for congruence of triangles (新的三角形全等定理)

B2. Congruence of right triangles (直角三角形的全等)

B3. SSA: a controversial criterion of congruence of triangles (斜全等 — 引起争议的三角形全等定理)

B4. Situations that SSA implies congruence of triangles (何种条件下 SSA 成为三角形全等定理)

C1. Centers of a triangle (三角形的中心)

C2. Lemma of dividing sides of a triangle (割分三角形边长的引理)

C3. Lemma of centroid of a triangle (三角形重心引理)

C4. How to construct a triangle from the given medians? (如何从已知三中线得回原三角形)

C5. Properties of circumradius and inradius (三角形外半径与内半径的性质)

C6. Lemma of angle-bisector of a triangle and its length (三角形分角线与其长度引理)

C7. Properties of excenters (三角形旁心的性质)

C8. Lemma of exterior angle bisectors of a triangle and their lengths (三角形外角平分线与其长度引理)

C9. Inradius and exradii of a right triangle (直角三角形的内半径与旁半径)

C10. A geometric coincidence (一个几何巧合)

C11. Properties of orthocenter and orthic triangle (三角形垂心与其垂足三角形的性质)

C12. Nine-point circle (九点圆)

D1. Line segment connecting the midpoints of two non-parallel opposite sides of a triangle or trapezoid or convex quadrilateral (连接三角形或梯形或四边形非平行两对边中点的线段)

D2. Parallelogram rule I for rectangles, parallelograms and convex quadrilaterals (长方形, 平行四边形与任一四边形的第一平行四边形律)

- D3. Parallelogram rule II (第二平行四边形律)
- D4. Trapezoid rule (梯形律)
- D5. Area of a convex quadrilateral (任一四边形的面积)
- D6. A property of isosceles trapezoids (等腰梯形的一个性质)
- E1. Necessary and sufficient conditions for a convex quadrilateral to be inscribable (任一四边形可内接于一圆的充分必要条件)
- E2. Necessary and sufficient conditions for a convex quadrilateral to be circumscribable (任一四边形可外切于一圆的充分必要条件)
- E3. Necessary and sufficient condition for a circumscribable, convex quadrilateral to be inscribable (可外切于一圆的四边形又可内接于另一圆的充分必要条件)
- E4. A property of inscribable convex quadrilaterals (可内接于一圆的四边形的一个性质)
- E5. Lemma of two pairs of intersecting tangent lines of a circle (一圆的两对相交切线的引理)
- E6. Urquhart's quadrilateral theorem I (厄瓜赫四边形第一定理)
- E7. Urquhart's quadrilateral theorem II (厄瓜赫四边形第二定理)
- E8. Ptolemy's theorem and law of sines (托勒密定理与正弦律)
- F1. A theorem of triangle (三角形的一个定理)
- F2. Ceva's theorem (切伐定理)
- F3. Theorem of angle-bisectors for isosceles triangles (等腰三角形分角线定理)
- F4. How to construct squares inscribed in a triangle? (如何做三角形的内接正方形?)
- F5. How to construct regular pentagon? (如何做正五边形?)
- F6. Lemma of chords through a fixed point in a circle (通过圆内一定点的弦引理)
- F7. Lemma of secant lines through a fixed point outside a circle (通过圆外一定点的割线引理)
- F8. A method of solving trigonometric equations and extrema of trigonometric functions (三角方程式的一个解法与三角函数的极值)
- G1. The radius of Soddy's internal circle of a triangle (索迪氏内圆的半径)
- G2. The radius of Soddy's external circle of a triangle (索迪氏外圆的半径)
- G3. Measurements of Morley's inner triangle of a triangle (莫利氏内三角形的各个量度)
- G4. A converse of Morley's inner triangle 莫利氏内三角形的一个逆命题)
- G5. Morley's outer triangle of a triangle (莫利氏外三角形)
- G6. Fermat's problem (费玛问题)
- G7. New developments of Fermat's problem (费玛问题的新发展)
- Exercises of Chapter I (习题)

Chapter II. Vectors and Matrices (第二章 向量与矩阵) (67)

- A1. The characteristic polynomials of AB and BA are equal (同阶方阵 A 与 B 的乘积 AB 与

BA 有相同的特征多项式)

A2. Solutions of $A^4 + B^4 = C^4$ in 2×2 integer matrices (方程式 $A^4 + B^4 = C^4$ 的二阶整数方阵解)

A3. Inverses of the matrices $A = (1 - \delta_{ij})_{i,j=1}^n$ (方阵 $A = (1 - \delta_{ij})_{i,j=1}^n$ 的逆方阵)

A4. the columns of a real square matrix form an orthonormal set of vectors iff this is true for its rows (一个实方阵的列向量为正规垂直向量若且唯若其行向量亦为正规垂直向量)

A5. Proof that $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \cdots = \sum_{k=1}^n x_k^n = 0$ implies $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (如果复数

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \cdots = \sum_{k=1}^n x_k^n = 0$, 则此 n 个复数皆为 0)

A6. Proof of $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} (-1)^{k+m} = \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} (-1)^{k+n} = 0$ for any $m, n \in \mathbb{Z}_+$ with $m < n$ (组

合等式 $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} (-1)^{k+m} = \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} (-1)^{k+n} = 0$ 的证明)

A7. Natural logarithms as areas (自然对数为面积)

B1. Elementary transformations in plane geometry (平面几何的基本转换)

B2. Vectors in plane and geometry (向量在平面与欧氏几何的功用)

B3. Proofs of properties of nine-point circle by elementary transformations (用基本转换证明九点圆的性质)

C1. Routh's theorem (劳思定理)

C2. An application of Ceva's theorem (切伐定理的一个应用)

C3. Comparison of $\sin A + \sin B + \sin C$ and $\cos A + \cos B + \cos C$ in an acute triangle (锐角三角形中 $\sin A + \sin B + \sin C$ 值与 $\cos A + \cos B + \cos C$ 值的比较)

C4. A minimum problem (一个极小值的问题)

Exercises of Chapter II (习题)

Chapter III. Calculus (第三章 微积分) (89)

A1. Proof of $\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$ for $x > 0$ ($\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$ 当 $x > 0$ 的证明)

A2. Comparing a^b and b^a for $e \leq a < b$ (比较 a^b 的值与 b^a 的值当 $e \leq a < b$)

A3. Proof of $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$ for $0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta}$ 当 $0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ 的证明)

A4. Proof of $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ($\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 的证明)

A5. Proof of $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ for $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} < \frac{\alpha}{\beta}$ 当 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 的证明)

A6. Proof of $\frac{\tan x}{\tan y} < \frac{x}{y} < \frac{\sin x}{\sin y}$ and $\sin x < x < \tan x$ for $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\tan x}{\tan y} < \frac{x}{y} < \frac{\sin x}{\sin y}$ 与 $\sin x < x < \tan x$ 当 $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ 的证明)

B1. Derivatives of exponential functions (指数函数的导数)

B2. A fallacy in differentiability (一个可微分性的谬误)

B3. Another fallacy in differentiability (另一个可微分性的谬误)

- B4. Simple proof of quotient rule of differentiation (微分的除法律)
- B5. A theorem on the second derivative of rational functions (关于有理函数二阶导数的一个定理)
- B6. A fallacy in calculus (一个微积分上的谬误)
- C1. Evaluation of $\int \sec \theta d\theta$ and $\int \sec^3 \theta d\theta$ (积分 $\int \sec \theta d\theta$ 与 $\int \sec^3 \theta d\theta$ 的估计)
- C2. Integration by parts (分部积分法)
- C3. Properties of hyperbolic functions (双曲函数的性质)
- C4. Hyperbolic substitutions in trigonometric integrals: Evaluation of $\int \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$ for integers m, n with $m+n$ to be odd (三角函数积分的双曲代换法: 积分 $\int \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta$ 当 m, n 为整数且 $m+n$ 为奇数的估计)
- C5. An integral property of quadratic and cubic polynomials (一元二次式与三次式的一个积分性质)
- C6. Proof of $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (等式 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 的证明)
- C7. Evaluation of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ for $m, n = 1, 2, \dots$ (积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ 当 $m, n = 1, 2, \dots$ 的估计)
- C8. Evaluation of $\int_0^{+\infty} \frac{a \cos mx}{x^2+a^2} dx$ and $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2+a^2} dx$ for $a, m > 0$ (积分 $\int_0^{+\infty} \frac{a \cos mx}{x^2+a^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2+a^2} dx$ 的估计)
- D1. Boundedness of the sequence $\{(1 + \frac{1}{n})^n : n = 1, 2, \dots\}$ (无穷序列 $\{(1 + \frac{1}{n})^n : n = 1, 2, \dots\}$ 的上限)
- D2. Elementary proof of irrationality of e (指数 e 为无理数的简单证明)
- D3. Proof of $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ and $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ (极限值 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ 的证明)
- D4. Euler's constant and e (欧拉常数与指数)
- E1. Distance from a point to a line in the plane (平面上一点到一线的垂直距离)
- E2. A result of three circles (关于三个相切圆的结果)
- E3. Expressions of $\tan n\theta$ and $n \tan^{-1} a$ ($\tan n\theta$ 与 $n \tan^{-1} a$ 的表示法)
- E4. Bisectrix, trisectrix and cissoid (二等分角的曲线, 三等分角的曲线与蔓叶线)
- E5. Ellipses (椭圆的性质)
- E6. Hyperbolas (双曲线的性质)
- E7. Reflections on ellipses (椭圆的反射原理)
- E8. Reflections on hyperbolas (双曲线的反射原理)
- E9. A minimum problem — idea of radar (一个极小值问题 — 雷达的构想)
- E10. A new geometric inequality (一个新的几何不等式)
- E11. Tangent lines of a parabola (抛物线的切线)

E12. Using slopes to solve extremal problems (利用斜率解极值问题)

F1. Fundamental theorem of sequences (无穷序列基本定理)

F2. Convergence and divergence of $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ for $p > 0$ (无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 的收敛与发散)

F3. Proof of $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} = \frac{1}{3}(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}})$ (级数和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} = \frac{1}{3}(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}})$ 的证明)

F4. Proof of $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (级数和 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 的证明)

F5. Proof of $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ and $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (级数和 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ 的证明)

F6. Regroupings of alternating series (交错级数的重组)

F7. Representations of $\frac{\sin x}{x}$ by infinite products ($\frac{\sin x}{x}$ 的无穷乘积表示法)

G1. Proof of $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1}$ for $m, n \in \mathbb{Z}_+$ (组合等式 $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1}$ 的证明)

G2. Proof of the factorial identity $n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n$ for any $n \in \mathbb{Z}_+$ and any fixed number x (阶乘等式 $n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n$ 当 x 为任一固定数的证明)

G3. Proof of $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ (积分 - 无穷级数等式 $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ 的证明)

H1. Simple proof of $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = 1$ for $0 \leq r \leq 1$ and $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = -1$ for $r > 1$ with

$$P(r, \theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} \quad \left(\text{关于泊松核 } P(r, \theta) \text{ 等式 } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = \pm 1 \text{ 当 } \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ r > 1 \end{cases} \right)$$

的证明)

H2. Elegant proof of $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a \Gamma(x)} = 1$ for any $0 < a < 1$, where $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ for $x > 0$ is the gamma function (伽玛函数 $\Gamma(x)$ 等式 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a \Gamma(x)} = 1$ 当 $0 < a < 1$ 的证明)

Exercises of Chapter III (习题)

Chapter IV. Theory of Equations (第四章 方程式论) (143)

A1. Quadratic formula vs Citardauq formula (二次式定理与西达道克公式)

A2. Reduction of cubic equations (化一元三次方程式为标准式)

A3. Cardan's method of cubic equations (解一元三次方程式的卡当方法)

A4. Discriminant of real cubic equations (实系数一元三次方程式的判别式)

A5. Reduction of quartic equations (化一元四次方程式为标准式)

A6. Descartes' method of quartic equations (解一元四次标准方程式的笛卡尔方法)

A7. Ferrari's method of quartic equations (解一元四次方程式的法拉利方法)

- A8. Parameter of Ferrari's method of a real quartic equation is real (用法拉利方法解实系数一元四次方程式所得的参数恒可为实数)
- A9. Hacke's method of quartic equations (比笛卡尔方法简便的亥克方法)
- A10. Malhotra's method of quartic equations (解一元四次方程式的马尔霍特拉方法)
- A11. Impossibility of reducing a quintic equation to a resolvent with lower degree (化一元五次方程式为一可解的低次方程式是不可能)
- B1. Synthetic division by linear factors (除式为一次式的综合除法)
- B2. Simple criteria of searching roots of real polynomials (找实系数一元多次式零根的简单方法)
- B3. Arithmetic mean of roots of a polynomial (一元多次式零根的算术平均数)
- B4. Rational root theorem (有理根定理)
- B5. Descartes' rule of signs (笛卡尔符号律)
- B6. An application of Descartes' rule of signs to a problem of triangles (笛卡尔符号律在一三角形问题上的应用)
- B7. Theorem of Budan-Fourier (布丹 - 傅利叶定理)
- B8. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$: Sufficient condition for the existence of a unique real root of a real cubic equation ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$: 实系数一元三次方程式存在唯一实零根的充分条件)
- B9. Factorization of $x^{2n} + x^n + 1$ ($x^{2n} + x^n + 1$ 的因式分解)
- B10. Real solutions of $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ (方程式 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ 的实数解)
- C1. Synthetic division by nonlinear factors (除式为多次式的综合除法)
- C2. Lagrange's interpolation formula (拉格朗日内插公式)
- C3. Application of synthetic division by linear factors on Lagrange's interpolation formula (综合除法在拉格朗日内插公式上的应用)
- C4. Applications of synthetic division by quadratic factors (综合除法的应用)
- D1. Proof of $\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1) \cdots (n+m)$ for $m, n \in \mathbb{Z}_+$ (等式 $\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1) \cdots (n+m)$ 的证明)
- D2. Proof of $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)} \right\}$ for $n \in \mathbb{Z}_+$ and $m = 2, 3, \cdots$ (等式 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)} \right\}$ 的证明)
- D3. Method of difference for summation of series (用差分方法来求级数的和)
- D4. Expressions of general term and n th sum of a series in terms of differences (级数一般项与前 n 项和的差分表示法)
- D5. Fundamental theorem of summation of series by method of difference (级数差分方法求和基本定理)

- D6. Evaluation of $\sum_{k=1}^n k^m$ for $m, n \in \mathbb{Z}_+$ (有限级数 $\sum_{k=1}^n k^m$ 的估计)
- E1. Classifications of difference equations (差分方程式的分类)
- E2. Linear recursion (线性巡回定义序列)
- E3. Solutions of linear ordinary difference equation $x_{n+1} = ax_n + b$ of the first order (第一阶线性常差分方程式 $x_{n+1} = ax_n + b$ 的解)
- E4. Solutions of linear ordinary difference equation $x_{n+2} = ax_{n+1} - bx_n$ of the second order (第二阶线性常差分方程式 $x_{n+2} = ax_{n+1} - bx_n$ 的解)
- E5. Solutions of nonlinear difference equations of Riccati type with zero constant term (黎卡提型非线性差分方程式其常数项为零的解)
- E6. Complete solutions of nonlinear difference equations of Riccati type with non-zero constant term (黎卡提型非线性差分方程式其常数项不为零的完全解)
- E7. Solutions of bilinear difference equations of the first order (第一阶双线性差分方程式的解)
- E8. Solution of nonlinear difference equations of Clairaut type (克莱罗型非线性差分方程式的解)
- E9. Transforming nonlinear difference equations to linear difference equations (非线性差分方程式转化为线性差分方程式)
- Exercises of Chapter IV (习题)

Chapter V. Set Theory and Topology (第五章 集合论与拓扑) (185)

- A1. Saturation of maps (函数的饱和)
- A2. Reflexivity, symmetry and transitivity are the minimal requirements for equivalence relation (反射性, 对称性与移转性是任一等同关系所具备的最少条件)
- A3. An equivalent definition of well ordered sets (可完全排列次序的集合的相等定义)
- A4. A countably infinite set which has an uncountable family of subsets such that any two have finite intersection (一无限可数集合具有无限个子集合, 其中任两个子集合的交集为有限)
- A5. Self-distributivity, semi-commutativity and idempotent property of binary operation (二元运算的自分配性, 半交换性与同势性质)
- B1. Kuratowski's closure axioms with less axioms (库拉托夫斯基封闭性公设可为更少的公设所定义)
- B2. Derived set operator (衍生集合算子)
- B3. The new kernel operator (新的核算子)
- B4. Some equivalent definitions of continuity of maps (函数连续性的相等定义)
- C1. Truth values of a statement—criticism of multi-valued logic (叙述的逻辑值 — 多值逻辑的评注)

Exercises of Chapter V (习题)

Chapter VI. Number Theory (第六章 数论)(197)

- A1. Identities of GCD and LCM (关于 GCD 与 LCM 的等式)
- A2. Diagonals of Pascal's triangle are coefficients of the expansions of $(1-x)^{-n}$ with $|x| < 1$ for $n \in \mathbb{Z}_+$ (帕斯卡三角形的对角线是 $(1-x)^{-n}$ 的展开式的系数, 当 $|x| < 1$ 且 n 为正整数)
- A3. Pascal's hexagons and Fibonacci's numbers (帕斯卡六边形与斐波那契数)
- A4. Mersenne's numbers and binomial coefficients (梅逊数与二项式系数)
- A5. A number pyramid (一个数字金字塔)
- A6. Infinitude of composite integers (合成整数有无穷多个)
- A7. Infinitude of prime integers (素数有无穷多个)
- A8. Equivalences of fundamental lemma of arithmetic (算术基本引理的等同)
- A9. Proof of fundamental theorem of arithmetic (unique factorization theorem) (算术基本定理 (亦即正整数可唯一分解为素数的乘积) 的证明)
- A10. Proof of $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ for any $n \in \mathbb{Z}_+$ (等式 $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 的证明)
- B1. Properties of greatest integer function (最大整数函数的性质)
- B2. Properties of sawtooth function (锯齿函数的性质)
- B3. Applications of sawtooth function on greatest integer function (锯齿函数在最大整数函数上的应用)
- C1. Construction of Pythagorean triplets (毕达哥拉斯三连数的建立)
- C2. Pythagorean triplets generated by addition table (由加法表生成毕达哥拉斯三连数)
- C3. Pythagorean triplets generated by multiplication table (由乘法表生成毕达哥拉斯三连数)
- D1. A general test of divisibility by primes (except 2 and 5) (被素数 (除了 2 与 5 外) 除尽的一个检测法)
- D2. The difference of any positive integer and its digital sum is always divisible by 9 (正整数与其数字和的差恒可为 9 除尽)
- D3. Divisibility of $a^3 - b^3$ by 2^n ($a^3 - b^3$ 可被 2^n 除尽的充分必要条件)
- D4. Can a positive integer have an odd number of positive integer factors? (一个正整数能有奇数个正整数因数吗?)
- D5. Special classes of numbers (几类特殊的数)
- D6. The square root of a positive integer is irrational if it is not an integer (如果一正整数的平方根不为整数, 其必为无理数)
- D7. Continued square roots (连续平方根)
- E1. Integers which are differences of squares (可表为两个整数平方差的整数)