高等数学

高等理工类数学教材

（下册）

● 边馥萍　杨则燊　主编

3

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等理工类数学教材

高等数学

（下册）

主　编：边馥萍　杨则燊

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是根据复旦大学李大潜院士主持的教育部教改项目，“将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验”以及天津大学“十五”重点教材改革立项的要求，并结合天津大学多年来数学教学改革的经验与体会而编写的。本书既保留了微积分基本内容，同时也注意当前科技的发展与计算机广泛应用的新形势，在各章均增加“数学实验”内容，并在有关章节中介绍数学建模的思想与有关应用，在练习题中增加了一些实际应用题。

本书分为上、下册出版，上册包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何与向量代数共6章，下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程共5章。各章节后附有适量练习题，书后附有练习题参考答案。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/边馥萍，杨则燊主编；李君湘等编．—天津：天津大学出版社，2005.7

高等理工类数学教材

ISBN 7-5618-2168-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①边…②杨…③李… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第076631号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内（邮编：300072）
电　　话 发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 18.75
字　　数 413千
版　　次 2005年7月第1版
印　　次 2005年7月第1次
印　　数 1—5 000
定　　价 26.00元

前　言

长期以来，我校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”，很不适应当前科技的发展与计算机广泛应用的新形势。面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要，数学教材改革必须有利于培养学生的数学素质、创新意识、创造精神与能力，把学生培养成高层次的高素质创新型人才，这就需要一部与之相适应的新的数学改革教材。

这套教材是复旦大学李大潜院士主持的教育部教改项目“将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验”的子项目，也是天津大学“十五”重点教材改革立项。

在本书编写过程中我们注意把握以下几点。

1. 着重基础，整体优化。新教材保留了“微积分”的原有内容，而把现代数学的观点、思想，包括一些符号、术语渗透到传统的微积分内容中，即做好微积分内容与现代数学内容的有机结合，以达到整体优化的目的。

2. 微积分内容与“数学实验”的结合。在每一章后均配上一节“数学实验”，让学生通过使用计算机和有关数学软件解决实际问题的过程来学习、应用数学。

3. 微积分内容和“数学建模”的结合。在有关章节中介绍数学建模的思想和某些应用实例。

4. 注重应用、扩大知识面。新教材在习题配备上作了重大改革，减少机械套用公式定理的计算题与证明题，增加物理、化学以及作业活动和管理活动中的实际应用题。

本书共11章，分上下两册。上册包括1~6章，下册包括7~11章。第1、10、11章由杨则燊执笔，第4、5、9章由边馥萍执笔，第2、3、7章由李君湘执笔，第6、8章由韩健执笔。数学实验由韩健、郭燕妮、苗新河执笔。于鲁源参加了本书的校对工作。

讲授本书全部内容大约需用192学时，也可根据专业需要选讲其中部分内容。

本书由徐绥教授负责主审，她对原稿进行了详细审阅，并提出了许多修改意见。本书作为教育部教改项目的子项目以及天津大学“十五”重点教材改革立项，得到了教育部有关领导和天津大学领导的指导与帮助，天津大学教务处、出版社、理学院等部门对本书的编写与出版给予了热情的鼓励与支持，在此一并表示衷心感谢。

数学教学内容和体系的改革是一项迫切而艰难的任务，我们的探索与改革仅仅是初步的。由于我们的水平与经验所限，本书难免有许多不妥之处，恳请同行专家和热心读者批评指正。

编者

2005，06

目 录

第7章 多元函数微分学

自然科学与工程技术中的许多问题,往往与多种因素有关,反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的关系,这就提出了多元函数的概念及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论以二元函数为主的多元函数微分法及其应用.

7.1 多元函数的概念

7.1.1 平面点集

考虑在平面上引入一个直角坐标系,平面上的点 P 与二元有序实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应.这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.二元有序实数组 (x,y) 的全体,即 $R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ 就表示坐标平面.

坐标平面上满足某一条件的一切点的集合,称为平面点集,用大写英文字母 D、E、F 等表示平面点集.

例如,$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$,表示平面上以原点为圆心,$R$ 为半径的圆内及圆周上的一切点的集合.

如果以点 P 表示 (x,y),$|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离,那么集合 E 也可以表成

$$E=\{P\mid |OP|\leqslant R\}.$$

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面上一点,δ 是某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,记为 $N(P_0,\delta)$,即

$$N(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\},$$

也就是

$$N(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

在几何上,邻域 $N(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心、δ 为半径的圆内的点 $P(x,y)$ 的全体.

点 P_0 的去心邻域,记作 $N(\hat{P}_0,\delta)$,即

$$N(\hat{P}_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域的半径 δ,就用 $N(P_0)(N(\hat{P}_0))$ 表示点 P_0 的某个邻域(去心邻域).

2. 区域

设 E 为平面上的点集,点 $P\in E$,如果存在点 P 的某个邻域 $N(P)$,使 $N(P)\subset E$,则

称 P 为 E 的一个内点.如图 7-1 所示,P_1 为 E 的内点,纯由内点组成的点集称为开集.

例如点集 $E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 中的每一个点都是 E_1 的内点,因此 E_1 为开集.

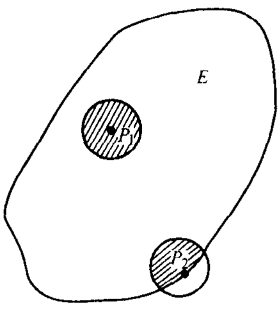

图 7-1

如果点 P 的任意邻域内既有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的一个边界点.如图 7-1 所示,P_2 为 E 的边界点.至于点 P 本身可以属于 E,也可以不属于 E.点集 E 的边界点的全体称为 E 的边界.

例如上例的点集 E_1,圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每一点都是 E_1 的边界点,此圆周是 E_1 的边界.

设 E 是开集,如果对于 E 内的任意两点 P_1 与 P_2,都能用折线连结起来,且该折线上的点都属于 E,则称 E 是连通的.连通的开集称为区域或开区域.开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如,集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 和 $\{(x,y)\mid x-y>0\}$ 都是区域;而集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭区域.

对于区域 D,如果存在正数 M,使得 D 中任何点 $P(x,y)$ 皆有

$$|x|\leqslant M,\ |y|\leqslant M,$$

则称区域 D 是有界的,否则称区域为无界.例如,$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是有界区域,而 $\{(x,y)\mid x-y>0\}$ 是无界区域.

3. 聚点

设 E 是平面上的点集,如果对于任意给定的 $\delta>0$,点 P 的去心邻域 $N(\hat{P},\delta)$ 内总有 E 中的点,则称 P 是 E 的聚点.

由聚点的定义可知,点集 E 的聚点 P 本身,可以属于 E,也可以不属于 E.

例如,平面点集

$$E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\},$$

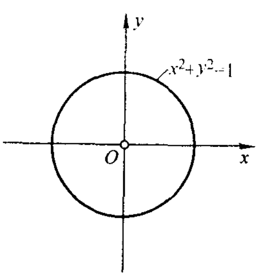

图 7-2

满足 $0<x^2+y^2<1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点,也都是 E 的聚点.点 $O(0,0)$ 及满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点即是 E 的边界点,也是 E 的聚点,其中点 $O(0,0)$ 不属于 E,而满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都属于 E.点集 E 以及它的边界上的一切点都是 E 的聚点,如图 7-2 所示.

4. n 维空间

设 n 为取定的一个自然数,用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成的集合,即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有时也用一个字母 $\boldsymbol{x}$ 表示,即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.当所有 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时,称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元,记为 $\mathbf{0}$ 或 O.在解析几何中,

通过直角坐标系，$\mathbf{R}^2$（或 $\mathbf{R}^3$）中的元素分别与平面（或空间）中的点或向量建立一一对应关系，因而 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量，x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量．特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的零元 $\mathbf{0}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量．

为了在集合 $\mathbf{R}^n$ 中的元素之间建立联系，在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算如下：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

这样定义的线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间．

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离，记作 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，规定 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$，显然，$n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致．

$\mathbf{R}^n$ 中元素 $\boldsymbol{x}$ 与零元 $\mathbf{0}$ 之间的距离记作 $\|\boldsymbol{x}\|$（在 $\mathbf{R}^1$、$\mathbf{R}^2$、$\mathbf{R}^3$ 中，通常记作 $|\boldsymbol{x}|$），采用这一记号，结合向量的线性运算，便得

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离以后，就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中变元的极限．

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，

如果

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0,$$

则称变元 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$．显然

$$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\Leftrightarrow x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中，由于线性运算和距离的引入，使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念，可以方便地推广到 $n(n\geqslant 3)$ 维空间中来．

例如，设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，$\delta$ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$N(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$$

就定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域．有了邻域的概念，就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中点集的内点、边界点、区域、聚点等概念，这里不再赘述．

7.1.2 多元函数的概念

在很多自然现象及实际问题中，经常会遇到一个变量依赖于多个变量的关系，举例如下．

例1.1 中心在原点 $O(0,0)$，在 x 轴、y 轴、z 轴上的半轴依次为 a、b、c 的上半椭球面的方程为

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\quad(a>0,b>0,c>0).$$

这里，变量 x、y 在一定范围 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right)$ 内可以自由取值，而变量 z 是随着变量 x、y 的变化而变化的，即对于平面点集

$$A=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}$$

上的每一个点 $P(x,y)$通过上式都有一个确定的数值 z 与之对应.

例 1.2 设由电阻 R_1、R_2 并联的电路,其总电阻为 R,根据电学知识可知 R 与 R_1、R_2 之间具有以下关系:

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里,变量 R_1、R_2 在一定范围($R_1>0,R_2>0$)内可以自由取值,而变量 R 是随着变量 R_1、R_2 的变化而变化的,即对于平面点集

$$A=\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$$

中的每一个点 $P(R_1,R_2)$,通过上式都有一个确定的数 R 与之对应.

例 1.3 一定量的理想气体的体积 V、压强 p 和绝对温度 T 之间存在以下关系:

$$V=R\,\frac{T}{p},$$

其中 R 为常数.这里,变量 p 与变量 T 在一定范围($p>0,T>T_0$,其中 T_0 为该气体的液化点)内可以自由取值,而变量 V 是随着变量 p、T 的变化而变化的.即对于平面点集

$$A=\{(p,T)\mid p>0,T>T_0\}$$

中的每一个点 $P(p,T)$通过上面关系都有一个确定的数值 V 与之对应.

上面 3 个例子的实际意义虽然各不相同,但它们却有共同的特征,抽出它们的共性,就可得出以下二元函数的定义.

定义 1.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数,通常记作

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

或

$$z=f(P),P\in D,$$

其中点集 D 称为该函数的定义域,x、y 称为自变量,z 称为因变量.

上述定义中,与自变量 x、y 的一对值(即二元有序数组)(x,y)相对应的因变量 z 的值,也称为 f 在点(x,y)处的函数值,记作 $f(x,y)$,即 $z=f(x,y)$.函数值 $f(x,y)$的全体所构成的集合称为 f 的值域,记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$及三元以上的函数.一般地,如果把函数定义中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 D,则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,也可记为 $u=f(P)$,这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.显然,当 $n=1$ 时,就得到一元函数.二元及二元以上的函数统称为多元函数.

前面曾利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y=f(x)$的图形,一般说来,它是平面上的一条曲线,对于二元函数 $z=f(x,y)$可以利用空间直角坐标系来表示它的图形.

设已给二元函数 $z=f(x,y)$,其定义域为 D.对任意取定的点 $P_0(x_0,y_0)\in D$,对应的函数值记作 $z_0=f(x_0,y_0)$,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中就确定了一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

在一般情况下，当点 $P(x,y)$ 遍取函数定义域 D 的一切点时，对应的点 $M(x,y,z)$ 的全体组合成一个空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$，这个点集称为二元函数的图形，其图形一般是一张曲面，如图 7-3 所示.

如例 1.1 中的二元函数

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

的图形是中心在原点，三个半轴为 a、b、c 的上半椭球面，如图 7-4 所示.

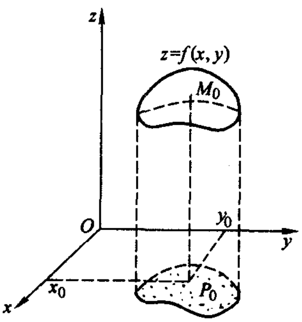

图 7-3

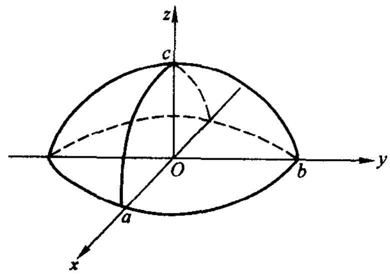

图 7-4

7.1.3　多元函数的极限

现在先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当自变量 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时，即点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限定义.

设函数 $z=f(x,y)$ 定义在平面点集 E 上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 为平面点集 E 的聚点，而点 $P(x,y)\in E$，如果当点 $P(x,y)$ 以任意方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数对应值 $f(x,y)$ 趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数

$$z=f(x,y)$$

当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时的极限.

在这里，注意到点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 就是点 P 与 P_0 之间的距离趋近于零，即

$$|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

下面仿照一元函数极限的定义，用"$\varepsilon-\delta$"的语言方式来描述二元函数的极限.

定义 1.2　设函数 $z=f(x,y)$ 定义在平面点集 E 上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 为平面点集 E 的聚点，A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε，都存在正数 δ，使得适合不等式

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A,$$

或者 $$f(x,y)\to A,(x,y)\to(x_0,y_0).$$

也记作 $$\lim_{P\to P_0}f(P)=A,$$

或 $$f(P)\to A\quad(P\to P_0).$$

二元函数的极限也叫做二重极限.

根据二元函数的极限定义,所谓的二重极限存在,是指点 $P(x,y)\in E$ 按任意方式趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$时,函数 $f(x,y)$都无限接近于同一常数 A.因此,如果点 $P(x,y)$以某一特殊方式趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$时,即使函数 $f(x,y)$无限接近于某一确定值,仍不能由此断定函数的极限存在.但是反过来,如果当点 $P(x,y)$以不同的方式趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$时,函数趋近于不同的值,那么可以断定这函数的极限不存在.

例 1.4 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

讨论当点 $P(x,y)\to O(0,0)$时,函数的极限是否存在.

解 当点 $P(x,y)$沿 x 轴趋近于 $O(0,0)$时,

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0.$$

当点 $P(x,y)$沿 y 轴趋近于 $O(0,0)$时,

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=0.$$

虽然点 $P(x,y)$以上述两种特殊方式趋近于点 $O(0,0)$时,函数的极限存在并且相等,但是极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$$

并不存在,这是因为当点 $P(x,y)$沿直线 $y=kx$ 趋近于点 $O(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然,它随着 k 的不同而改变.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$,即 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去.

关于多元函数极限的运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 1.5 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$.

解 因为当$(x,y)\to(3,0)$时,$xy\to 0$,从而有

$$\frac{\sin(xy)}{xy}\to 1,$$

所以 $$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\left(\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right)=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}x=3.$$

7.1.4 多元函数的连续性

定义 1.3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 定义在平面点集 D 上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 为平面点集 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 是定义域 D 上的连续函数.

若函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

由函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续的定义可知，如果 $f(x,y)$ 满足下列条件之一：

(1) $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处无定义；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$.

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处间断.

例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由本节例 1.4 可知，当点 $P(x,y)$ 趋近于点 $O(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限不存在，所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

二元函数的间断点也可以是一条曲线，如函数

$$z=\frac{1}{y-x^2},$$

在抛物线 $y=x^2$ 上没有定义，因此该抛物线上的每一个点都是此函数的间断点.

一元函数的极限运算法则可以推广到多元函数的极限运算中来，根据这些法则和二元函数连续的定义，可以证明二元连续函数的和、差、积、商(分母不等于零)也都是连续函数.

二元函数的复合函数也有与一元函数的复合函数相类似的性质：如果函数 $u=\varphi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，而且 $u_0=\varphi(x_0,y_0)$、$v_0=\psi(x_0,y_0)$，又 $f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处连续，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

由常数和 x、y 的基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的，并且能用 x、y 的一个数学式子表示的函数叫做二元初等函数. 例如

$$z=\sin(x^2+y),\ z=\ln(1+x^2+y^2),\ z=\frac{(x^2-y^2)e^{x^2y}}{2\arcsin(x+y)}$$

都是初等函数.二元初等函数在定义区域内是连续函数.所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

以上关于二元函数的连续性概念,可相应地推广到多元函数上去.

因此有结论:一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

由多元初等函数的连续性,如果要求它在点 P_0 处的极限存在,而该点又在此函数的定义区域内,则极限值就是函数在该点的函数值,即

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 1.6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

解 因为 $\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}=\dfrac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{1-(\sqrt{1+x^2+y^2})^2}=-(1+\sqrt{1+x^2+y^2})$,

故 $$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[-(1+\sqrt{1+x^2+y^2})]=-2.$$

以上的运算用到了二元函数 $-(1+\sqrt{1+x^2+y^2})$ 在点 $O(0,0)$ 的连续性.

类似于在闭区间上一元连续函数的性质,在有界闭域上多元连续函数具有以下性质.

性质 1(最大值和最小值定理) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,则它在 D 上必定取得最大值和最小值,也就是说在 D 上至少存在一点 P_1 与一点 P_2,使得 $f(P_1)$ 是函数 $f(P)$ 在 D 上的最小值,而 $f(P_2)$ 是函数 $f(P)$ 在 D 上的最大值,即对任一点 $P\in D$,均有

$$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2).$$

性质 2(介值定理) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续,m 和 M 分别是函数 $f(P)$ 在 D 上的最小值和最大值,$m<M$.又设 μ 是介于 m 与 M 之间的任一实数,$m<\mu<M$,则在 D 上至少存在一点 P_0,使

$$f(P_0)=\mu.$$

***性质 3**(一致连续性定理) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续,则它在 D 上必定一致连续.即对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于 D 上的任何两点 P_1、P_2,只要满足 $|P_1P_2|<\delta$ 时,就恒有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立.

习题 7-1

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$,试求 $f(-y,x)$、$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$ 和 $f[x,f(x,y)]$.

2. 设 $f\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{xy}\right)=\dfrac{x^3-2xy^2\sqrt{xy}+3xy^4}{y^3}$,试求 $f(x,y)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)$.

3. 设$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求$f(x,y)$.

4. 设$f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$,求$f(tx,ty)$.

5. 设$f(u,v,w)=u^w+w^{(u+v)}$,求$f(x+y,x-y,xy)$.

6. 设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$,如果当$y=1$时,$z=x$,试确定函数f和z.

7. 求下列函数的定义域,并画出定义域的图形:

(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; (2) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

(3) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$; (4) $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}\quad(a>0)$;

(5) $u=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (6) $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\ln(1-\sqrt{y})$.

8. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x$.

9. 求函数$z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$的间断点.

10. 求函数$z=\tan(x^2+y^2)$的间断点.

11. 证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$不存在.

12. 证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在原点$O(0,0)$处不连续.

13. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

7.2 偏导数

7.2.1 偏导数的概念

在一元函数中,从研究函数的变化率引入了导数概念,对于多元函数同样需要研究它的变化率,由于多元函数的自变量不止一个,在这里,首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率.下面以二元函数$z=f(x,y)$为例,如果只有自变量x变化,而自变量y固定(看作常量),这时z就是x的一元函数,z对x的导数,就称为$z=f(x,y)$对x的偏导数.