# 发展型积分-微分方程的有限元方法

# Finite Element Methods for Evolution Integro-Differential Equations

张 铁 著

NEUPRESS
东北大学出版社

# 发展型积分-微分方程的有限元方法

# Finite Element Methods for Evolution Integro-Differential Equations

张　铁　著

东 北 大 学 出 版 社

**图书在版编目(CIP)数据**

发展型积分-微分方程的有限元方法/张铁著 .—沈阳:东北大学出版社,2001.12
ISBN 7-81054-696-1

Ⅰ.发… Ⅱ.①张… Ⅲ.积分微分方程-有限元法 Ⅳ.O175.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095436 号

---

出 版 者:东北大学出版社
(邮编:110004 地址:沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)
出 版 人:李毓兴
印 刷 者:东北大学印刷厂
发 行 者:东北大学出版社
开 本:850mm×1168mm 1/32
字 数:198 千字
印 张:7.625
印 数:1~1000 册
出版时间:2001 年 12 月第 1 版
印刷时间:2001 年 12 月第 1 次印刷
责任编辑:刘淑芳 责任校对:文 方
封面设计:唐敏智 责任出版:秦 力

---

定 价:18.00 元

垂询电话:024—83687331(发行部) 024—83680265(传 真)
E-mail:neuph@neupress. com
http://www. neupress. com

## 内容提要

本书介绍作者和国内外同行十几年来在发展型积分-微分方程及其相关方程有限元方法领域中所取得的研究成果。书中以有限元 Ritz-Volterra 投影为主要分析工具，深入系统地研究了抛物型、双曲型积分-微分方程，Sobolev 方程，粘弹性方程和 Stokes 型积分-微分方程的有限元理论。本书中的研究方法和结果也适用于椭圆、抛物和双曲型偏微分方程。

本书可供计算数学工作者，高等学校有关专业的研究生以及从事科学和工程计算工作的科技人员参考。

# 前　　言

许多物理和工程实际问题，例如，具有记忆性质材料的热传导，多孔结构粘弹性体的压缩，核反应堆中热交换过程等，其数学模型都可归结为如下形式的抛物型积分-微分方程

$$u_t + A(t)u + \int_0^t B(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset R^n$ 为有界区域，$J=(0,T]$，$A(t)$为二阶椭圆型偏微分算子，$B(t,\tau)$为任意一个不高于二阶的偏微分算子。方程(1)中积分项的出现(来源于物理过程的记忆或反馈性质)使其与传统的抛物方程有着本质的区别，数值求解也更为困难。因此，在较长的一个时期内，有关这类发展型积分-微分方程数值理论和方法的研究要落后于通常的椭圆、抛物或双曲型偏微分方程。包括方程(1)在内的发展型积分-微分方程来源于众多的物理和工程问题，其数值方法的研究也受到人们越来越广泛的重视。近十年来，作者和国内外其他学者在发展型积分-微分方程有限元方法的研究领域中进行了卓有成效的研究工作并取得了十分丰富的研究成果，但这些成果尚未得到全面和系统的总结。这促使作者撰写了这本专著来介绍发展型积分-微分方程及其相关方程的有限元理论。

早期关于方程(1)的数值方法主要是差分方法(参见 J. Douglas (1962)，B. Budak(1974) 和 H. Brunner(1982)等人的工作)。进入20世纪80年代以来，求解方程(1)的有限元方法开始得到广泛的研究。最初人们仍像处理抛物方程那样，使用有限元 Ritz 投影来进行方程(1)的有限元分析。但研究结果表明，方程(1)中积分项的出现

使问题的复杂性大大的增加，有限元 Ritz 投影已失去其原有的效用。鉴于方程(1)与抛物方程的区别在于出现了积分项，这启示人们考虑可否构造一个带有积分项的有限元投影来取代 Ritz 投影使上述困难得以克服。基于这种思想，1988 年 Cannon and Lin 引进了一个新的有限元投影，称之为 Ritz-Volterra 投影，定义为：$V_h : u(t) \to V_h u(t) \in S_h$ 满足

$$A(t;u(t)-V_h u(t),v)+\int_0^t B(t,\tau;u(\tau)-V_h u(\tau),v)\mathrm{d}\tau = 0, v \in S_h$$

其中 $S_h$ 为有限元空间，$A(t;u,v)$和$B(t,\tau;u,v)$分别是与算子 $A(t)$和 $B(t,\tau)$相应的双线性形式。显然，有限元 Ritz-Volterra 投影是有限元 Ritz 投影 $R_h$ 的自然推广，当 $B(t,\tau)\equiv 0$ 时，$V_h = R_h$ 成立。此外，有限元 Ritz-Volterra 投影也可视为 Volterra 积分-微分方程：

$$A(t)u+\int_0^t B(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), x \in \Omega, t \in J \qquad (2)$$

的有限元解。有限元 Ritz-Volterra 投影的引进为抛物型积分-微分方程有限元方法的研究开辟了新的途径，更为重要的是它也为与 Volterra 积分-微分方程相关的其他发展型方程有限元方法的研究提供了统一的且十分有效的理论分析工具。这些方程包括：

双曲型积分-微分方程：

$$u_{tt}+A(t)u+\int_0^t B(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (3)$$

Sobolev 方程：

$$A(t)u_t + B(t)u = f(t), x \in \Omega, t \in J \qquad (4)$$

粘弹性方程：

$$u_{tt} + A(t)u_t + B(t)u = f(t), x \in \Omega, t \in J \qquad (5)$$

和 Stokes 型积分-微分方程：

$$u_t+\mu\Delta u+\int_0^t B(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau + \nabla p = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (6)$$

本书首先对有限元 Ritz-Volterra 投影进行了全面和系统的研究，然后介绍如何使用有限元 Ritz-Volterra 这一强有力的分析工具来研究发展型积分-微分方程及其相关方程的有限元方法。全书共分八章，内容包括有限元 Ritz-Volterra 投影的稳定和逼近性质，发展型积分-微分方程的半离散和全离散有限元方法，有限元解的长时间稳定性和误差分析，带弱奇异积分核问题，非线性问题的有限元逼近，有限元的超收敛性质以及有限体积元方法等。在进行有限元解的 $W^{1,p}$ 和 $L_p$ 模误差分析中，一个关键的技术是作者创建的时间依赖型 Green 函数及其各种有界性估计，这种新型的 Green 函数在有限元超收敛理论研究中也起着重要作用。本书所介绍的方法和结果具有广泛的适用性，它不但适用于发展型方程(1)～(6)，而且还适用于椭圆、抛物和双曲型方程，因为这些方程是发展型方程(1)～(3)中偏微分算子 $B(t,\tau)\equiv 0$ 时的特例。

本书内容主要取自作者和国内外同行十几年来在这一领域中的研究成果，这其中包括 J. R. Cannon, Y. P. Lin, V. Thomée, I. H. Sloan, C. M. Chen 和 N. Y. Zhang 等人的工作，详细的说明已在每章末尾的文献与评注中给出。特别需要指出的是，作者的许多研究成果得益于近十年来与加拿大 Alberta 大学数学系 Y. P. Lin 教授的学术交流和合作研究。

本书的出版得到了国家教育部高校骨干教师基金的资助，在此表示感谢。

作　者

2001 年 10 月于东北大学

# 目　　录

# CONTENTS

# 第一章　预备知识

## §1　Sobolev 空间简介

设 $R^n$ 为 $n$ 维欧氏空间，$\Omega$ 为 $R^n$ 中的区域．用 $L_p(\Omega)$ $(1\leqslant p<\infty)$表示一切定义在 $\Omega$ 上 $p$ 次可积函数组成的集合，$L_\infty(\Omega)$表示一切在 $\Omega$ 上本性有界的(即除去一个零测度集外是有界的)可测函数组成的集合．则按范数

$$\| u \|_{0,p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty$$

$$\| u \|_{0,\infty} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \equiv \inf_{m(E)=0} \sup_{x\in\Omega\setminus E} |u(x)|, p = \infty$$

$L_p(\Omega)$为 Banach 空间，而 $L_2(\Omega)$为 Hilbert 空间，其内积定义为

$$(u, v) = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$$

用 $C^m(\Omega)$表示区域 $\Omega$ 上 $m$ 次连续可微的函数组成的集合，$C^\infty(\Omega)$表示 $\Omega$ 上无穷次可微函数组成的集合，简记 $C^0(\Omega)$为 $C(\Omega)$．记

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x\in\Omega : u(x)\neq 0\}}$$

并称之为函数 $u$ 的支集．用 $C_0^m(\Omega)$和 $C_0^\infty(\Omega)$分别表示由 $C^m(\Omega)$和 $C^\infty(\Omega)$中一切具有紧支集的函数组成的集合．

记区域 $\Omega$ 上的偏微分算子 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，其中 $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为非负整数，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$称为 $n$ 重指标，标记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$．

**定义 1.1** 设 $L_{loc}^{1}(\Omega)$为区域 $\Omega$ 上的 Lebesgue 局部可积函数空间，$u\in L_{loc}^{1}(\Omega)$. 如果存在 $v\in L_{loc}^{1}(\Omega)$，使得

$$\int_{\Omega} u\, D^{\alpha}\varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v\varphi \mathrm{d}x,\ \forall\ \varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$$

则称 $v$ 是 $u$ 的 $|\alpha|$ 阶广义导数，并记为 $v=D^{\alpha}u$.

由变分法基本引理可知广义导数若存在必惟一. 又容易验证，若 $u$ 的古典导数存在且属于 $L_2(\Omega)$，则其广义导数存在且与古典导数一致. 因此广义导数概念是古典导数概念的推广.

广义导数具有如下性质：

(ⅰ) $D^{\alpha}(au+bv)=aD^{\alpha}u+bD^{\alpha}v$，$a,b$ 为常数

(ⅱ) $D^{\alpha+\beta}u=D^{\alpha}(D^{\beta}u)$

(ⅲ) $D(uv)=vDu+uDv, D=D_i$

(ⅳ) $D^{\alpha}u=0$ 对一切 $|\alpha|=m$ 成立，当且仅当 $u$ 几乎处处等于一个 $m-1$ 次多项式.

设 $m$ 为非负整数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，考虑函数空间

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u: D^{\alpha}u\in L_p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\}$$

这个空间依范数

$$\|u\|_{m,p}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\Omega}|D^{\alpha}u|^{p}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}, 1\leqslant p<\infty$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\max_{|\alpha|\leqslant m}\|D^{\alpha}u\|_{0,\infty}, p=\infty$$

构成一个 Banach 空间，我们称之为 Sobolev 空间. 有时也使用半范数

$$|u|_{m,p}=\Big(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}|D^{\alpha}u|^{p}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}, 1\leqslant p<\infty$$

$$|u|_{m,\infty}=\max_{|\alpha|=m}\|D^{\alpha}u\|_{0,\infty}, p=\infty$$

又令 $W_0^{m,p}(\Omega)$为 $C_0^{\infty}(\Omega)$按范数 $\|\cdot\|_{m,p}$在空间 $W^{m,p}(\Omega)$内的闭包，则 $W_0^{m,p}(\Omega)$也是一个 Banach 空间，它一般是 $W^{m,p}(\Omega)$的

一个真闭子空间.简记

$$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega),\ H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_m=\|\cdot\|_{m,2},\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_{0,2},\ |\cdot|_m=|\cdot|_{m,2}$$

于是 $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$是 Hilbert 空间,其内积为

$$(u,v)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(D^\alpha u,D^\alpha v),\ u,v\in H^m(\Omega)$$

Sobolev 空间具有如下性质:

(i) $W^{m,p}(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$,是可分的.

(ii) $W^{m,p}(\Omega)$, $1<p<\infty$,是自反和一致凸的.

(iii) $\{u\in C^\infty(\Omega):\|u\|_{m,p}<\infty\}$在 $W^{m,p}(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$,中稠密;当 $\Omega$ 的边界是局部 Lipschitz 连续时, $C^\infty(\overline{\Omega})$在 $W^{m,p}(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$,中稠密.

再引进负指数 Sobolev 空间.设 $1<p<\infty$, $p'=p/(p-1)$为 $p$ 的共轭指数.显然,对任一 $v\in L_{p'}(\Omega)$,可确定 $W^{m,p}(\Omega)$上的一个有界线性泛函 $L_v$:

$$L_v(u)=(u,v),\ u\in W^{m,p}(\Omega)$$

将此泛函的范数记为

$$\|v\|_{-m,p'}(=\|L_v\|)=\sup_{u\in W^{m,p}(\Omega)}\frac{|(u,v)|}{\|u\|_{m,p}}$$

并称之为 $v$ 的负范数.显然

$$|(u,v)|\leqslant\|u\|_{m,p}\|v\|_{-m,p'}$$

定义负指数 Sobolev 空间

$W^{-m,p'}(\Omega)\equiv L_{p'}(\Omega)$按$\|\cdot\|_{-m,p'}$的完备化空间

可以证明 $W^{-m,p'}(\Omega)$等距同构于对偶空间$(W^{m,p}(\Omega))'$.当 $p'=2$ 时,简记 $H^{-m}(\Omega)=W^{-m,2}(\Omega)$.

## §2 嵌入定理、迹定理

Sobolev 空间的更深刻的性质反映在下面的嵌入定理和迹定理.