

发展型积分-微分方程的 有限元方法

Finite Element Methods for
Evolution Integro-Differential Equations

张 铁 著



NEUPRESS
东北大学出版社

发展型积分-微分方程的有限元方法

Finite Element Methods for Evolution Integro-Differential Equations

张 铁 著

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

发展型积分-微分方程的有限元方法/张铁著. —沈阳: 东北大学出版社, 2001. 12

ISBN 7-81054-696-1

I. 发… II. ①张… III. 积分微分方程-有限元法 IV. O175.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095436 号

出 版 者: 东北大学出版社

(邮编: 110004 地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)

出 版 人: 李毓兴

印 刷 者: 东北大学印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

开 本: 850mm×1168mm 1/32

字 数: 198 千字

印 张: 7.625

印 数: 1~1000 册

出版时间: 2001 年 12 月第 1 版

印刷时间: 2001 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑: 刘淑芳 责任校对: 文 方

封面设计: 唐敏智 责任出版: 秦 力

定 价: 18.00 元

垂询电话: 024—83687331 (发行部) 024—83680265 (传 真)

E-mail: neuph@neupress.com

http: //www. neupress. com

内 容 提 要

本书介绍作者和国内外同行十几年来在发展型积分-微分方程及其相关方程有限元方法领域中所取得的研究成果。书中以有限元 Ritz-Volterra 投影为主要分析工具，深入系统地研究了抛物型、双曲型积分-微分方程，Sobolev 方程，粘弹性方程和 Stokes 型积分-微分方程的有限元理论。本书中的研究方法和结果也适用于椭圆、抛物和双曲型偏微分方程。

本书可供计算数学工作者，高等学校有关专业的研究生以及从事科学和工程计算工作的科技人员参考。

前 言

许多物理和工程实际问题,例如,具有记忆性质材料的热传导,多孔结构粘弹性体的压缩,核反应堆中热交换过程等,其数学模型都可归结为如下形式的抛物型积分-微分方程

$$u_t + A(t)u + \int_0^t B(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset R^n$ 为有界区域, $J = (0, T]$, $A(t)$ 为二阶椭圆型偏微分算子, $B(t, \tau)$ 为任意一个不高于二阶的偏微分算子。方程(1)中积分项的出现(来源于物理过程的记忆或反馈性质)使其与传统的抛物方程有着本质的区别,数值求解也更为困难。因此,在较长的一个时期内,有关这类发展型积分-微分方程数值理论和方法的研究要落后于通常的椭圆、抛物或双曲型偏微分方程。包括方程(1)在内的发展型积分-微分方程来源于众多的物理和工程问题,其数值方法的研究也受到人们越来越广泛的重视。近十年来,作者和国内外其他学者在发展型积分-微分方程有限元方法的研究领域中进行了卓有成效的研究工作并取得了十分丰富的研究成果,但这些成果尚未得到全面和系统的总结。这促使作者撰写了这本专著来介绍发展型积分-微分方程及其相关方程的有限元理论。

早期关于方程(1)的数值方法主要是差分方法(参见 J. Douglas (1962), B. Budak(1974) 和 H. Brunner(1982)等人的工作)。进入 20 世纪 80 年代以来,求解方程(1)的有限元方法开始得到广泛的研究。最初人们仍像处理抛物方程那样,使用有限元 Ritz 投影来进行方程(1)的有限元分析。但研究结果表明,方程(1)中积分项的出现

使问题的复杂性大大的增加,有限元 Ritz 投影已失去其原有的效用。鉴于方程(1)与抛物方程的区别在于出现了积分项,这启示人们考虑可否构造一个带有积分项的有限元投影来取代 Ritz 投影使上述困难得以克服。基于这种思想,1988 年 Cannon and Lin 引进了一个新的有限元投影,称之为 Ritz-Volterra 投影,定义为: $V_h: u(t) \rightarrow V_h u(t) \in S_h$ 满足

$$A(t; u(t) - V_h u(t), v) + \int_0^t B(t, \tau; u(\tau) - V_h u(\tau), v) d\tau = 0, v \in S_h$$

其中 S_h 为有限元空间, $A(t; u, v)$ 和 $B(t, \tau; u, v)$ 分别是与算子 $A(t)$ 和 $B(t, \tau)$ 相应的双线性形式。显然,有限元 Ritz-Volterra 投影是有限元 Ritz 投影 R_h 的自然推广,当 $B(t, \tau) \equiv 0$ 时, $V_h = R_h$ 成立。此外,有限元 Ritz-Volterra 投影也可视为 Volterra 积分-微分方程:

$$A(t)u + \int_0^t B(t, \tau)u(\tau) d\tau = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (2)$$

的有限元解。有限元 Ritz-Volterra 投影的引进为抛物型积分-微分方程有限元方法的研究开辟了新的途径,更为重要的是它也为与 Volterra 积分-微分方程相关的其他发展型方程有限元方法的研究提供了统一的且十分有效的理论分析工具。这些方程包括:

双曲型积分-微分方程:

$$u_{tt} + A(t)u + \int_0^t B(t, \tau)u(\tau) d\tau = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (3)$$

Sobolev 方程:

$$A(t)u_t + B(t)u = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (4)$$

粘弹性方程:

$$u_{tt} + A(t)u_t + B(t)u = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (5)$$

和 Stokes 型积分-微分方程:

$$u_t + \mu \Delta u + \int_0^t B(t, \tau)u(\tau) d\tau + \nabla p = f(t), x \in \Omega, t \in J \quad (6)$$

本书首先对有限元 Ritz-Volterra 投影进行了全面和系统的研究,然后介绍如何使用有限元 Ritz-Volterra 这一强有力的分析工具来研究发展型积分-微分方程及其相关方程的有限元方法。全书共分八章,内容包括有限元 Ritz-Volterra 投影的稳定和逼近性质,发展型积分-微分方程的半离散和全离散有限元方法,有限元解的长时间稳定性和误差分析,带弱奇异积分核问题,非线性问题的有限元逼近,有限元的超收敛性质以及有限体积元方法等。在进行有限元解的 $W^{1,p}$ 和 L_p 模误差分析中,一个关键的技术是作者创建的时间依赖型 Green 函数及其各种有界性估计,这种新型的 Green 函数在有限元超收敛理论研究中也起着重要作用。本书所介绍的方法和结果具有广泛的适用性,它不但适用于发展型方程(1)~(6),而且还适用于椭圆、抛物和双曲型方程,因为这些方程是发展型方程(1)~(3)中偏微分算子 $B(t, \tau) \equiv 0$ 时的特例。

本书内容主要取自作者和国内外同行十几年来在这一领域中的研究成果,这其中包括 J. R. Cannon, Y. P. Lin, V. Thomée, I. H. Sloan, C. M. Chen 和 N. Y. Zhang 等人的工作,详细的说明已在每章末尾的文献与评注中给出。特别需要指出的是,作者的许多研究成果得益于近十年来与加拿大 Alberta 大学数学系 Y. P. Lin 教授的学术交流与合作研究。

本书的出版得到了国家教育部高校骨干教师基金的资助,在此表示感谢。

作 者

2001 年 10 月于东北大学

目 录

第一章 预备知识	1
§ 1 Sobolev 空间简介	1
§ 2 嵌入定理、迹定理	3
§ 3 有限元空间及其性质	6
§ 3.1 有限元空间	6
§ 3.2 插值逼近性质	8
§ 3.3 有限元逆性质	10
§ 4 椭圆边值问题的有限元逼近	11
§ 4.1 椭圆边值问题的适定性	11
§ 4.2 有限元逼近	13
第二章 有限元 Ritz-Volterra 投影	16
§ 1 符号和不等式	16
§ 2 存在惟一性及 L_2 和 H^1 模逼近性质	19
§ 3 负模误差估计	23
§ 4 时间依赖型 Green 函数及其估计	25
§ 4.1 Green 函数的定义	25
§ 4.2 Green 函数的估计	29
§ 5 $W^{1,p}$ 模稳定性和 L_p 模 ($2 \leq p \leq \infty$) 模逼近性质	44
§ 6 广义 Ritz-Volterra 投影逼近	49

第三章 抛物型积分-微分方程的有限元方法	54
§ 1 解的正则性理论	55
§ 2 半离散有限元逼近	63
§ 3 全离散有限元格式	69
§ 3.1 向后欧拉格式	70
§ 3.2 Crank-Nicolson 格式	73
§ 4 全离散有限元格式的修正	78
§ 5 有限元解的长时间稳定性与误差估计	84
§ 6 带弱奇异积分核问题	89
第四章 某些发展型方程的有限元方法	97
§ 1 双曲型积分-微分方程	97
§ 2 Sobolev 方程	101
§ 3 粘弹性方程	103
§ 4 Stokes 型积分-微分方程	107
§ 4.1 问题及其有限元近似	107
§ 4.2 一个广义 Ritz-Volterra 投影	109
§ 4.3 误差估计	111
第五章 非线性问题的有限元逼近	116
§ 1 一个非线性投影逼近	116
§ 2 非线性抛物型积分-微分方程	123
§ 3 非线性双曲型积分-微分方程	125
§ 4 非线性 Sobolev 方程	128
第六章 有限元超收敛性:一维问题	132
§ 1 有限元 Ritz-Volterra 投影的节点超收敛性	133

§ 2 抛物型积分-微分方程有限元逼近的节点超收敛性	138
§ 3 一维投影型插值及其超收敛性质	145
§ 3.1 一维投影型插值	145
§ 3.2 超收敛基本估计	147
§ 4 有限元逼近的函数和导数的超收敛点	149
§ 4.1 有限元 Ritz-Volterra 投影	149
§ 4.2 抛物型积分-微分方程	152
§ 5 导数小片插值恢复技术	154
第七章 有限元超收敛性:二维问题	160
§ 1 有限元 Ritz-Volterra 投影的超收敛性质	160
§ 2 抛物型积分-微分方程有限元逼近的超收敛性质	164
§ 3 二维投影型插值及其超收敛性质	167
§ 3.1 二维投影型插值	167
§ 3.2 超收敛基本估计	170
§ 3.3 对有限元 Ritz-Volterra 投影的应用	177
§ 4 线性有限元导数恢复技术	179
§ 4.1 线性三角元	179
§ 4.2 双线性矩形元	182
§ 4.3 双线性四边形元	183
第八章 有限体积元方法	187
§ 1 基于有限体积元的 Ritz-Volterra 投影	187
§ 2 最优阶误差估计	193
§ 3 抛物型积分-微分方程的有限体积元方法	200
§ 4 最低的正则性条件:两个反例	204
参考文献	211

CONTENTS

Chapter 1 Preliminaries	1
§ 1 Sobolev spaces	1
§ 2 Embedding theory and trace theory	3
§ 3 Finite element spaces and related properties	6
§ 3.1 Finite element spaces	6
§ 3.2 Interpolating approximation properties	8
§ 3.3 Finite element inverse properties	10
§ 4 Finite element approximations to elliptic boundary value problems	11
§ 4.1 The regularity theory for elliptic boundary value problems	11
§ 4.2 Finite element approximations	13
Chapter 2 Finite Element Ritz-Volterra Projection	16
§ 1 Notations and inequalities	16
§ 2 Unique existence and approximation properties in L_2 and H^1 norms	19
§ 3 Error estimates in negative norms	23
§ 4 Time-dependent Green functions and related estimates	25
§ 4.1 Definitions of Green functions	25
§ 4.2 Norm estimates of Green functions	29

§ 5	Stability and approximation properties in $W^{1,p}$ and $L_p (2 \leq p \leq \infty)$ norms	44
§ 6	A generalized Ritz-Volterra projection approximation	49
Chapter 3 Finite Element Methods for Integro-differential Equations of Parabolic Type		
§ 1	Regularity theory for the exact solutions	55
§ 2	Semi-discrete finite element approximations	63
§ 3	Fully-discrete finite element schemes	69
§ 3.1	Backward Euler schemes	70
§ 3.2	Crank-Nicolson schemes	73
§ 4	Revisions of the fully-discrete finite element schemes	78
§ 5	Long-time stability and error estimates of the finite element solutions	84
§ 6	Problems with weakly singular kernel	89
Chapter 4 Finite Element Methods for Some Evolution Equations		
§ 1	Integro-differential equations of hyperbolic type	97
§ 2	Sobolev equations	101
§ 3	Viscoelasticity equations	103
§ 4	Integro-differential equations of Stokes type	107
§ 4.1	Problem and its finite element approximations	107
§ 4.2	A generalized Ritz-Volterra projection	109
§ 4.3	Error estimates	111
Chapter 5 Finite Element Approximations for Nonlinear Problems		
§ 1	A nonlinear projection approximation	116

§ 2	Nonlinear integro-differential equations of parabolic type	123
§ 3	Nonlinear integro-differential equations of hyperbolic type ...	125
§ 4	Nonlinear Sobolev equations	128

Chapter 6 Finite Element Superconvergence: One Dimension

Problems	132
§ 1 Node point superconvergence for finite element Ritz-Volterra projection	133
§ 2 Node point superconvergence for finite element approximations to integro-differential equations of parabolic type	138
§ 3 Interpolation operator of projection type in one dimensional case and its superconvergence properties	145
§ 3.1 Interpolation operator of projection type in one dimensional case	145
§ 3.2 Superconvergence elementary estimates	147
§ 4 The superconvergent points of finite element solutions in function and derivative approximations	149
§ 4.1 Finite element Ritz-volterra projection	149
§ 4.2 Integro-differential equations of parabolic type	152
§ 5 The derivative patch interpolation recovery techniques	154

Chapter 7 Finite Element Superconvergence: Two Dimension

Problems	160
§ 1 Superconvergence of the finite element Ritz-Volterra projection	160
§ 2 Superconvergence of the finite element approximates to integro-differential equations of parabolic type	164

§ 3	Interpolation operator of projection type in two dimensional case and its superconvergence properties	167
§ 3.1	Interpolation operator of projection type in two dimensional case	167
§ 3.2	Superconvergence elementary estimates	170
§ 3.3	Applications to finite element Ritz-Volterra projection	177
§ 4	Derivative recovery techniques for linear finite element approximations	179
§ 4.1	Linear triangular element	179
§ 4.2	Bilinear rectangular element	182
§ 4.3	Bilinear quadrilateral element	183
Chapter 8	Finite Volume Element Methods	187
§ 1	Ritz-Volterra projection based on the finite volume elements	187
§ 2	Optimal order error estimates	193
§ 3	Finite volume element methods for integro-differential equations of parabolic type	200
§ 4	The lowest regularity conditions; two counter examples	204
Reference		211

第一章 预备知识

§ 1 Sobolev 空间简介

设 R^n 为 n 维欧氏空间, Ω 为 R^n 中的区域. 用 $L_p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示一切定义在 Ω 上 p 次可积函数组成的集合, $L_\infty(\Omega)$ 表示一切在 Ω 上本性有界的(即除去一个零测度集外是有界的)可测函数组成的集合. 则按范数

$$\|u\|_{0,p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

$\|u\|_{0,\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \equiv \inf_{m(E)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus E} |u(x)|, p = \infty$
 $L_p(\Omega)$ 为 Banach 空间, 而 $L_2(\Omega)$ 为 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$$

用 $C^m(\Omega)$ 表示区域 Ω 上 m 次连续可微的函数组成的集合, $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上无穷次可微函数组成的集合, 简记 $C^0(\Omega)$ 为 $C(\Omega)$. 记

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$$

并称之为函数 u 的支集. 用 $C_0^m(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 分别表示由 $C^m(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$ 中一切具有紧支集的函数组成的集合.

记区域 Ω 上的偏微分算子 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, 其中 $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为非负整数, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 称为 n 重指标, 标记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

定义 1.1 设 $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 为区域 Ω 上的 Lebesgue 局部可积函数空间, $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. 如果存在 $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

则称 v 是 u 的 $|\alpha|$ 阶广义导数, 并记为 $v = D^{\alpha} u$.

由变分法基本引理可知广义导数若存在必惟一. 又容易验证, 若 u 的古典导数存在且属于 $L_2(\Omega)$, 则其广义导数存在且与古典导数一致. 因此广义导数概念是古典导数概念的推广.

广义导数具有如下性质:

(i) $D^{\alpha}(au + bv) = aD^{\alpha}u + bD^{\alpha}v$, a, b 为常数

(ii) $D^{\alpha+\beta}u = D^{\alpha}(D^{\beta}u)$

(iii) $D(uv) = vDu + uDv$, $D = D_i$

(iv) $D^{\alpha}u = 0$ 对一切 $|\alpha| = m$ 成立, 当且仅当 u 几乎处处等于一个 $m-1$ 次多项式.

设 m 为非负整数, $1 \leq p \leq \infty$, 考虑函数空间

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u; D^{\alpha}u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

这个空间依范数

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{0,\infty}, \quad p = \infty$$

构成一个 Banach 空间, 我们称之为 Sobolev 空间. 有时也使用半范数

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$|u|_{m,\infty} = \max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}u\|_{0,\infty}, \quad p = \infty$$

又令 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 按范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 内的闭包, 则 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 也是一个 Banach 空间, 它一般是 $W^{m,p}(\Omega)$ 的

一个真闭子空间. 简记

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}, \|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}, |\cdot|_m = |\cdot|_{m,2}$$

于是 $H^m(\Omega), H_0^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), u, v \in H^m(\Omega)$$

Sobolev 空间具有如下性质:

(i) $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, 是可分的.

(ii) $W^{m,p}(\Omega), 1 < p < \infty$, 是自反和一致凸的.

(iii) $\{u \in C^\infty(\Omega): \|u\|_{m,p} < \infty\}$ 在 $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, 中稠密; 当 Ω 的边界是局部 Lipschitz 连续时, $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, 中稠密.

再引进负指数 Sobolev 空间. 设 $1 < p < \infty, p' = p/(p-1)$ 为 p 的共轭指数. 显然, 对任一 $v \in L_{p'}(\Omega)$, 可确定 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一个有界线性泛函 L_v :

$$L_v(u) = (u, v), u \in W^{m,p}(\Omega)$$

将此泛函的范数记为

$$\|v\|_{-m,p'} (= \|L_v\|) = \sup_{u \in W^{m,p}(\Omega)} \frac{|(u, v)|}{\|u\|_{m,p}}$$

并称之为 v 的负范数. 显然

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'}$$

定义负指数 Sobolev 空间

$$W^{-m,p'}(\Omega) \equiv L_{p'}(\Omega) \text{ 按 } \|\cdot\|_{-m,p'} \text{ 的完备化空间}$$

可以证明 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 等距同构于对偶空间 $(W^{m,p}(\Omega))'$. 当 $p' = 2$ 时, 简记 $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$.

§ 2 嵌入定理、迹定理

Sobolev 空间的更深刻的性质反映在下面的嵌入定理和迹定理.