大学数学立体化教材

微积分

（经济类）上册

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材

微积分（经济类）上册

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

内容简介

本书根据高等学校经济类专业微积分课程的教学大纲及考研大纲编写而成。内容包括函数与极限、一元微分学、一元积分学、多元微分学、多元积分学、无穷级数、微分方程等知识。书中融入了数学历史、数学文化的教育，本书教学例题的配备注意了学习难度的循序渐进，并选编了题型较为丰富的习题。附录中编入了与本书配套的数学实验指导。书后配有内容丰富、功能强大的《微积分多媒体学习系统》（光盘），其内容涵盖了课堂教学、习题解答、实验教学、综合训练等模块，在教学过程中，将光盘与本书配合使用，形成了教与学的有机结合。本书可作为高等学校经济类专业的微积分教材。

与书配套建设的《微积分多媒体教学系统》（光盘）将随教材配送给教师。

总　序

1999 年的暑假，经过近半年的调研和思考之后，笔者义无反顾地选择了“大学数学教育信息化研究”作为自己的一个中期研究目标，促使笔者作出这样的选择主要基于以下几点：

1. 教育信息化是 21 世纪教育改革和发展的大方向. 借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标.

2. 20 世纪 90 年代以来，我国高等教育迅速从“精英型教育”向“大众化教育”转化，教育规模的迅速扩大，给我国大学教育带来了一系列的问题，例如，现阶段大学数学的教育正面临生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列似乎矛盾的问题.

3. 大学应以教学为中心，但长期以来，教学研究没有得到应有的重视，天女散花式的教研投入，造成国内高校在同一水平上的大量重复建设和浪费，而重点研究项目的投入又严重不足，难以为继.

4. 与其他学科的教育信息化研究相比，大学数学教育信息化的研究进展缓慢. 随着大众化教育阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要.

由针对上述问题的分析可见，如何将教育技术与信息技术相结合，针对所面临的问题建设一系列“新型教材”就有其非常的紧迫性. 在笔者的设想中，这种“新型教材”就是“教学资源库式的立体化教材”. 它至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教、学、考多层次、全方位的建设. 此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量、培养学生的数学应用与实践能力，利于学生的课后学习辅导和优秀学生的提高训练与考研训练，以及全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用. 基于这一设想和预期，笔者组织和带领一个团队，开始了大学数学立体化教材的研发工作.

大学数学立体化教材的研发工作迄今已历时 6 年，期间历经多次升级改版，从 2001 年起，先后被全国 200 多所高等院校采用或试用，形成了现在全新的“教学资源库式”的立体化教材——中国人民大学出版社推出的“大学数学立体化教材”，它包含两大类，共六册. 理工类：《高等数学》，《线性代数》与《概率论与数理统计》；经济类：《微积分》，《线性代数》与《概率论与数理统计》. 下面，笔者以其中

的一套来简单介绍该立体化教材的形式与内涵.

立体化教材的形式：

1.《 * * * * 》(书)

2.《 * * * * 多媒体学习系统》(光盘,学生专用)

与上述立体化教材配套建设的还有

3.《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘,教师专用)

(将随教材免费配送给教材采用单位的教师使用.)

《 * * * * 》(书)的编写具有下列特点：

● 书中融入了数学历史与数学文化的教育.

● 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思想.

● 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出了进一步的总结.

● 依循序渐进的原则,以适当的难度梯度选编了教学例题.

● 与教材同步配套,简明实用地编写了“大学数学实验指导”.该实验指导在按教学内容设计了相应的基础实验的基础上,还选择部分数学建模案例设计了部分综合实验.

《 * * * * 多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化的学习软件,其中设计了多媒体教案、习题详解、数学实验、题型分析、考研真题剖析等功能模块,内容包含从课程学习到考研提高的全部内容.具体来说,其特点如下：

● 多媒体教案：按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画,直击数学思想本质.

● 习题详解：以动态解析方式给出了习题的求解过程,并逐题配备了相关知识点链接.

● 数学实验：以交互、集成方式,设计了数学实验教学演示系统和实验案例库.

● 题型分析：总结解题思路,并通过精选的例题揭示出解题的一般规律和技巧.

● 考研真题：收录历届数学考研真题,并逐题作了深入剖析.

《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘),除包含了《 * * * * 多媒体学习系统》的主要功能模块和特点之外,它还具有以下特点：

● 多媒体教案：教学过程设计更适合教师进行课堂教学,补充了类型丰富的教学例题供教师选用,增加了课堂练习环节.

● 教学备课系统：搜集并整理了大量的教学资源和备课元素,供教师修改选

用，便于充分展现各位老师的个性化授课特点.

● 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势.

● 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验演示.

同步建设的《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 20 000 余道，具有以下特点：

● 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

● 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，可通过人工调整按钮，方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

● 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存人该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

● 二次开发功能：用户可对系统进行试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令笔者欣慰的是，与当初启动这个项目的时候相比，大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境（从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设）和软硬件技术（从软件开发平台到计算机相关硬件技术）都已经成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师的教学个性化问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

作为一项长期的事业，笔者今后将长期致力于大学数学立体化教材的建设工作，不断跟踪教育技术和信息化技术的发展，并及时应用到有关课程的教材建设之中，逐年提升、精益求精. 同时，笔者还将通过中国人民大学出版社的网站（在主页中点击"大学数学"按钮进入"大学数学立体化教材服务网站"，或直接输入网址 http://www.math123.cn 进入该服务网站）提供各种相关教学服务，包括：各类最新建设或升级的立体化教材的介绍、各类系统软件的演示等，尤其是还会提供丰富的下载内容，如各类系统软件的最新演示版本，有关各门课程的备课系统与数学实验案例库的最新升级版本、教学大纲、教学日历等.

6 年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》（理工类）出版以来，笔者的工作得到了许多国内同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

吴赣昌

2006 年 3 月 1 日

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

§1.1　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的 200 多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性．

一、集合

1. 集合的概念

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**．组成这个集合的事物称为该集合的**元素**．通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合的元素．

若元素 a 是集合 M 的元素，则记为 $a\in M$，读作 a 属于 M；若元素 a 不是集合 M 的元素，则记为 $a\notin M$，读作 a 不属于 M；由无限个元素组成的集合称为**无限集**；由有限个元素组成的集合称为**有限集**．

下面是几个集合的例子：

(1) 2006 年在广东地区出生的人构成一个集合(有限集)．

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成一个集合(有限集)．

(3) 全体奇数构成一个集合(无限集)．

(4) 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点构成一个集合(无限集)．

2. 集合的表示

列举法　即在 { } 中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素．

(1) 若 M 仅由有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成，可记为

$$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

(2) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合，可记为

$$A=\{1,2\}.$$

描述法 若 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，则可记为

$$M=\{x \mid x\text{所具有的特征}\}.$$

(3) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合，可记为

$$M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}.$$

(4) 全体奇数的集合，可记为

$$M=\{x \mid x=2n+1,\ n\text{为整数}\}.$$

3. 集合之间的关系

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A (见图1−1−1).

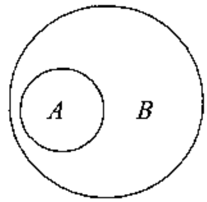


图 1−1−1

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称集合 A 和 B **相等**，记为

$$A=B.$$

例如，设 $A=\{1,2\}$，$M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，则

$$A=M.$$

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**，记为 S. 全集是相对的，一个集合在某一条件下是全集，而在另一条件下可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；当讨论的问题包括正整数和负整数时，全体正整数的集合就不是全集.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

例如，$\{x \mid x\text{为实数},\ x^2+1=0\}=\varnothing$.

规定 空集为任何集合的子集.

本书今后用到的集合主要是**数集**，即元素为数的集合. 下面是几个常用的数集：

自然数集 (记为 $\mathbf{N}$)　　整数集 (记为 $\mathbf{Z}$)

有理数集 (记为 $\mathbf{Q}$)　　实数集 (记为 $\mathbf{R}$)

数集间的关系

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

注：如无特别说明，本教程中提到的数都是实数.

4. 集合的基本运算

定义1 设 A 和 B 是两个集合，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$ (见图1−1−2)，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

定义2 设 A 和 B 是两个集合，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交**，记为 $A\cap B$ (见图1−1−3)，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

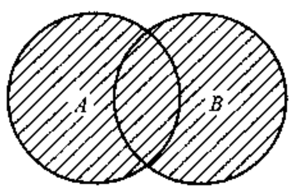


图 1−1−2

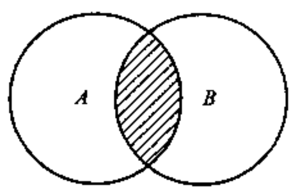


图 1−1−3

定义3 设A和B是两个集合，由属于A而不属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的**差**，记为$A-B$(见图1-1-4)，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

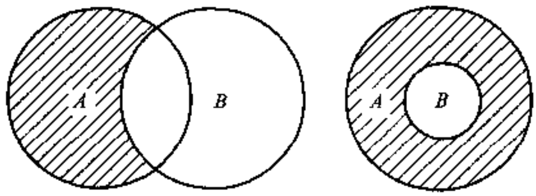


图1-1-4

定义4 全集S中所有不属于A的元素构成的集合，称为A的**余集**或**补集**，记为$\overline{A}$(见图1-1-5)，即

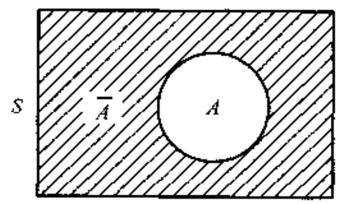


图1-1-5

$$\overline{A}=S-A.$$

例如，在实数集$\mathbf{R}$中，集合$A=\{x\mid 0<x\leq 1\}$的余集就是

$$\overline{A}=\{x\mid x\leq 0\text{ 或 }x>1\}.$$

注：本教程中用到的有关集合的内容，在中学课程中已经学过，这里只作简单介绍.

二、区间

定义5 介于某两个实数之间的全体实数称为区间. 这两个实数称为区间的**端点**. 两端点间的距离(线段的长度)称为区间的**长度**.

区间是高等数学中常用的实数集，包括有四种**有限区间**和五种**无限区间**.

有限区间

设a,b为两个实数，且$a<b$，数集$\{x\mid a<x<b\}$称为开区间，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a,b]=\{x\mid a\leq x\leq b\},\ [a,b)=\{x\mid a\leq x<b\},\ (a,b]=\{x\mid a<x\leq b\}.$$

无限区间

引入记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间. 例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leq x\},\ (-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图1-1-6所示.

$[a,+\infty)=\{x \mid a \le x\}$;　　$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$.

(a)　　(b)

图 1-1-6

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

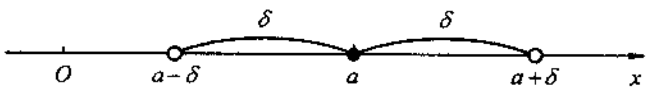
注：在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为"区间"，并常用 I 表示之.

三、邻域

定义6　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中，点 a 叫做该邻域的**中心**，δ 叫做该邻域的**半径**（见图1–1–7）.



$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$.

图 1-1-7

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心的 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

四、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量（变量），这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则. 本节我们先讨论两个变量的情形（多于两个变量的情形将在第6章再讨论）.

例如，在自由落体运动中. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s.

假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定. 其中 g 是重力加速度.

定义7 设x和y是两个变量，D是一个给定的非空数集. 如果对于每个数$x\in D$，变量y按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称y是x的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中，x称为**自变量**，y称为**因变量**，数集D称为这个函数的**定义域**，也记为D_f，即$D_f=D$.

对$x_0\in D$，按照对应法则f，总有确定的值y_0(记为$f(x_0)$)与之对应，称$f(x_0)$为函数在点x_0处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量x遍取D的所有数值时，对应的函数值$f(x)$的全体组成的集合称为函数f的**值域**，记为R_f或$f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

注：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如，函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

的(自然)定义域即为开区间$(-1,1)$.

函数的图形

对函数$y=f(x)$，$x\in D$，若取自变量x为横坐标，因变量y为纵坐标，则在平面直角坐标系xOy中就确定了一个点(x,y)，当x遍取定义域D中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$的**图形**(见图1-1-8).

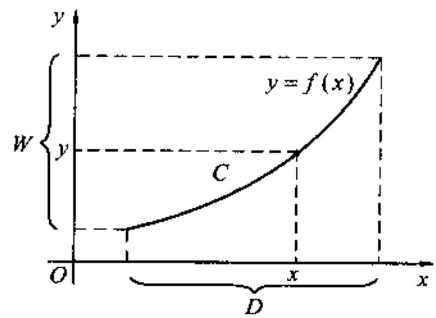


图 1-1-8

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**. 否则称为**多值函数**.

例如，方程$x^2+y^2=a^2$在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以x为自变量、y为因变量的函数. 对每一个$x\in(-a,a)$，都有两个y值$(\pm\sqrt{a^2-x^2})$与之对应，因而y是多值函数.

注：若无特别声明，本教程中的函数均指单值函数.

函数的常用表示法

(1) 表格法　自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) 图像法　在坐标系中用图形来表示函数关系的方法．

(3) 公式法(解析法)　自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法．根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种：

(i) 显函数　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示．例如，$y=x^2+1$．

(ii) 隐函数　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定．例如，$\ln y=\sin(x+y)$．

(iii) 分段函数　函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式．以下是几个分段函数的例子．

例 1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$．图形如图 1-1-9 所示．

例 2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-1-10 所示．

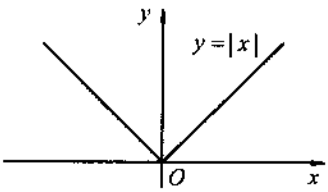


图 1-1-9

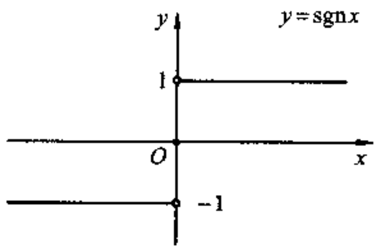


图 1-1-10

例 3　取整函数 $y=[x]$，其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．例如，

$[\pi]=3$，$[-2.3]=-3$，$[\sqrt{3}]=1$．

易见，取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，图形如图 1-1-11 所示．

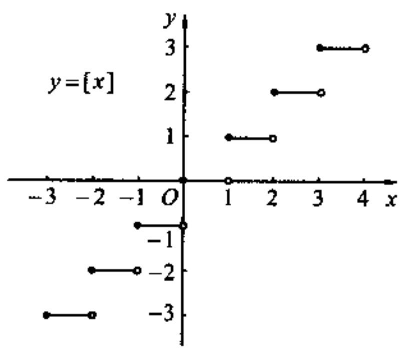


图 1-1-11

五、函数关系的建立

为解决实际应用问题，首先要将该问题量化，从而建立起该问题的**数学模

型，即建立函数关系.

要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来，首先应分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域.

例 4 某工厂生产某型号车床，年产量为a台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元，设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，即平均库存量为批量的一半. 设每年每台库存费为c元. 显然，生产批量大则库存费高；生产批量少则批数增多，因而生产准备费高. 为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系.

解 设批量为x，库存费与生产准备费的和为$f(x)$. 因年产量为a，所以每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$ (设其为整数). 于是，生产准备费为 $b\cdot\frac{a}{x}$，因库存量为 $\frac{x}{2}$，故库存费为 $c\cdot\frac{x}{2}$. 由此可得

$$f(x)=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{cx}{2}.$$

$f(x)$ 的定义域为 $(0, a]$，注意到本题中的 x 为车床的台数，批数 $\frac{a}{x}$ 为整数，所以 x 只取 $(0, a]$ 中的正整数因子.

例 5 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意，可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\le a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & a<s \end{cases},$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的，定义域为 $(0, +\infty)$.

六、函数特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为D，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\le M,$$

则称函数$f(x)$ 在 X 上**有界**. 或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个具有上述性质的正数 M，都是该**函数的界**.

若具有上述性质的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\le 1$.

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例 6　证明函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

证明　因为 $(1-x)^2\geq 0$，所以 $|1+x^2|\geq 2|x|$，故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{2|1+x^2|}\leq\frac{1}{2}$$

从而函数 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的 (见图1–1–12). 而 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的 (见图1–1–13).

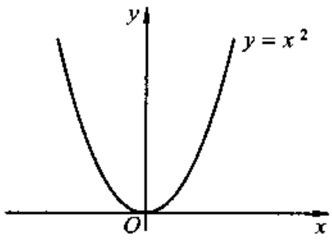


图 1–1–12

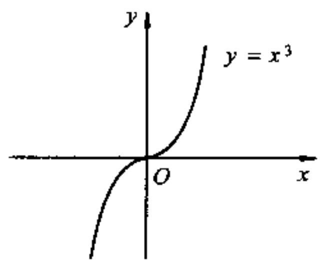


图 1–1–13

由定义易知，单调增加函数的图形沿 x 轴正向是逐渐上升的 (见图1–1–14)，单调减少函数的图形沿 x 轴正向是逐渐下降的 (见图1–1–15).

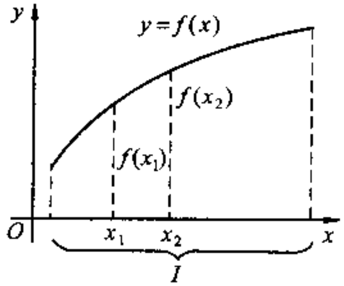


图 1–1–14

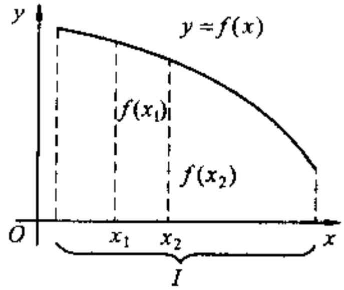


图 1–1–15

例 7　证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的函数.

证明　在 $(-1,+\infty)$ 内任取两点 x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$, 则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1, x_2 是 $(-1,+\infty)$ 内任意两点, 所以

$$1+x_1>0,\ 1+x_2>0.$$

又因为 $x_1-x_2<0$, 故 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若 $\forall x\in D$, 恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**; 若 $\forall x\in D$, 恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的 (见图1-1-16). 奇函数的图形关于原点是对称的 (见图1-1-17)

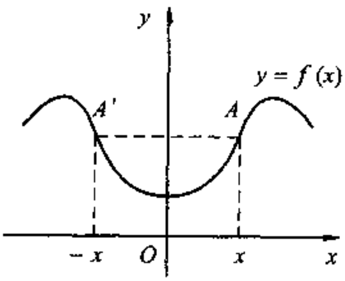


图 1-1-16

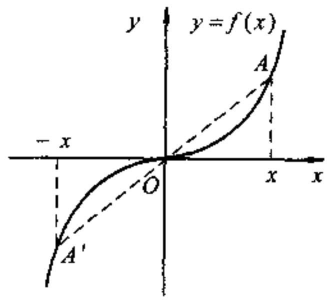


图 1-1-17

例如, 函数 $y=\sin x$ 是奇函数; 函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

例 8　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　因为函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$