文都教育考研精品系列

2005

考研数学历年真题精析

（数学三）

主　编：蔡子华

副主编：韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌

现代出版社

文都教育

2005 年

考研数学历年真题精析(数学三)

主　编:蔡子华
副主编:韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌
策　划:文都考研信息中心

现 代 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

2005年考研数学历年真题解析/蔡子华编. —北京:
现代出版社,2004
ISBN 7－80188－280－6

Ⅰ.2... Ⅱ.蔡... Ⅲ.数学(三)—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.D0－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 026507 号

编　　者:蔡子华
责任编辑:张俊国
出版发行:现代出版社
地　　址:北京市安定门外华安里 504 号
邮政编码:100011
电　　话:010－64267325　64240483(传真)
电子邮箱:xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷:北京长阳汇文印刷厂
开　　本:787×1092 毫米 1/16
印　　张:10.75
版　　本:2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印　　数:1—6000 册
书　　号:ISBN 7－80188－280－6
全套定价:66.00 元

考研数学精品名师简介

蔡子华

全国著名考研数学辅导专家，连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长。蔡老师从事考研辅导工作十几年，熟悉考生的弱点和考试的难点，深谙命题规律和重点，授课针对性极强，效果卓著。同时蔡子华老师更以能全程讲授微积分、线代、概率并能融会贯通和押题精准而闻名。

韩於羹

北京航空航天大学数学系教授，具有多年考研辅导经验。“从来不需要想起，永远也不会忘记”，是韩老师的经典名句，他诙谐幽默却又不失生动技巧的讲课方式使你对数学的兴趣猛增，从更深，更广泛的层面去理解数学，掌握数学，从而顺利渡过考研难关。

曾祥金

著名考研辅导专家，数学系博士生导师，长期参与研究生考试的命题研究、辅导及阅卷工作。全国经济博弈论专业委员会常务理事，主持或参与了多项国家级科学研究基金资助项目以及多项教学研究项目，并有多项成果获奖励。

童　武

著名考研辅导专家，首都师范大学教授、北京大学客座教授。以全程讲解微积分、线性代数、概率论与数理统计而著称考研数学界。其从事考研辅导数十年。足迹遍及华夏，桃李广布九州，授课上一直倡导“在课堂上解决问题”，其解题方法独特，记忆方法更是令人叫绝，受到广大学员的一致好评。

樊启斌

武汉大学博士生导师，长期从事考研数学的辅导工作，讲课通俗易懂，注重基础，突出重点，举一反三，其辅导效果得到学员的一致认可。

2005 年版本前言

毛泽东同志在 1930 年 5 月就“反对本本主义”提了这样一个建议：你对于那个问题不能解决吗？那末，你就去调查那个问题的现状和历史吧！…… 调查就是解决问题。

同样的道理，如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话，那么考生就应该去接触并尝试考研数学历年真题。了解的角度有多种多样，如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《考试大纲》）、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订，其中 1997 年之前的试卷与 1997 年之后（含 1997 年）的试卷，无论从考试规定还是对考生要求来讲，都有很大的不同，比如 1997 年之前考研数学分为五类，其中数学三是理工类，1997 年之后考研数学改为四类，其中数学三是经济类。另外，即使同样是理工类的数学一，要求也不一样。

1997 年之后的试卷之所以具有足够代表性的另外一个原因是，考生只要有最新 8 年的试卷分析，就足以能掌握考研数学的规律与命题思想。如（A 表示考察知识点相同，A^+ 表示类似题型，A^{++} 表示几乎完全相同的题目）：

2004 年数学一第(5)题与 2003 年数学二第一大题第(6)小题(A^+)；

2004 年数学一第(20)题与 2002 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学一第(22)题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++})；

2004 年数学三第(20)题与 2000 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学三、四第(22)题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++})；

2004 年数学三第(23)题与 2002 年数学一第十二大题(A)；

2004 年数学四第(18)题与 2002 年数学四第七大题(A^{++})；

1997 — 2003 年之间重复出现的题型或考察相同知识点的题目有：

2003 年数学一第三大题与 2001 年数学三第六大题(A^+)；

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++})；

2003 年数学二第七大题与 1997 年数学二第八大题(A^+)；

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++})；

2003 年数学三第九大题与 2002 年数学三第九大题(A^+)；

2003 年数学四第七大题与 1998 年数学三第八大题(A^+)；

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++})；

2002 年数学二第十一大题(2)与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++})；

2002 年数学三第十一大题(1)与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++})；

2001 年数学一第六大题与 1997 年数学一第三大题(2)(A^{++})；

2001 年数学二第一大题(5)与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++})；

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A^{++});

2000 年数学二第二大题(2) 与 1997 年数学二第二大题(3)(A^{++});

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A);

……

事实上,真题就是最好的模拟题,考生应着力把最近 8 年的试题练精钻透。题不在多,贵在精!

因此,我们从题库中节选了从 1997 — 2004 年的考研数学的全部真题,我们特聘请全国著名考研辅导专家、连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华老师担任主编,同时诚邀北京大学、清华大学等全国知名高等学府的数学教授参与编写这套丛书。

这套丛书的主要特点有以下几个方面:

1. 按数学一、数学二、数学三和数学四分类,分册出版;

2. 将历年真题以填空题/选择题/解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中,便于考生在复习时自我训练;

3. 将答案解析放在第三部分,并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评;

值得注意的是,2004 数学试卷结构做了一些调整,增加两个选择题,减少一个解答题,解答题总分为 94 分,有意思的是,有些客观题(填空题和选择题)和解答题的设计思路非常巧妙,如:

例 1 客观题[04.4(5)] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵,且 $a_{11}=1,\mathbf{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{b}$ 的解是________

例 2 解答题[04.3(17)] 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b), \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$,证明:$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

总而言之,近 8 年考研数学真题分析充分揭示出这样的命题原则或者说遵循这样的指导思想:“既要有利于国家对高层次人才的选拔,也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高”。

希望 2005 年考生在使用本书的时候,牢记两个“有利于”的指导思想。充分利用真题,提高分析问题、解决问题的能力。值得补充的是,由于近几年不少理工类的考题随后出现在经济类试卷之中,因此我们建议经济类考生在复习数学三、数学四的同时,可以参阅理工类的数学一、数学二。

由于时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后,祝 2005 年考生取得满意的成绩!

编者

2004 年 3 月

目　　录

第一部分　题型集萃

第二部分　历年试题

第三部分　真题解析

第一部分　题型集萃

第一章　微积分

第一节　函数、极限、连续

2002 年一(1)

(1) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n =$ ________.

2004 年一(1)

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$，则 $a =$ ________，$b =$ ________.

1998 年二(2)

(3) 设函数 $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　)

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x = 1$

(C) 存在间断点 $x = 0$　　(D)W 存在间断点 $x = -1$

2000 年二(1)

(4) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

2003 年二(1)

(5) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$(　　)

(A) 在 $x = 0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x = 0$

(C) 在 $x = 0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点 $x = 0$

2004 年二(7)

(6) 函数 $f(x) = \frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内有界(　　)

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

2004 年二(8)

(7) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = a$，$g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，则(　　)

(A)$x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B)$x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C)$x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

$(D)g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

2003 年三

(8) 设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x\in[\frac{1}{2},1)$. 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续.

2004 年三(15)

(9) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$.

第二节　一元函数微分学

1997 年一(1)

(1) 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 f 可微,则 $dy=$ ________.

1998 年一(1)

(2) 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1) 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

2001 年一(1)

(3) 设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$,其中 Q 是产出量,L 是劳动投入量,K 是资本投入量,而 A,α,β 均为大于零的参数,则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为________.

2003 年一(1)

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是________.

2003 年一(2)

(5) 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

1997 年二(2)

(6) 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$,且 $f''(x)<0$,则在 $(0,+\infty)$ 内有(　　)

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$

1998 年二(1)

(7) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,周期为 4. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为(　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

2000 年二(2)

(8) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　)

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$ (D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

2001 年二(1)

(9) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则( )

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2002 年二(1)

(10) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则( )

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

2004 年二(9)

(11) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则( )

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2004 年二(11)

(12) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则错误的是( )

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(a)$

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(b)$

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f'(x_0)=0$

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$

1997 年三

(13) 在经济学中，称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数，而称函数 $\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb－Douglas 生产函数(简称 C－D 生产函数).

试证明：当 $x\to 0$ 时，固定替代弹性生产函数变为 C－D 生产函数，即有 $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$.

1997 年五

(14) 一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$(万元/吨)，x 为销售量(单位：吨)，商品的成本函数是 $C=3x+1$(万元).

(1) 若每销售一吨商品，政府要征税 t(万元)，求该商家获最大利润时的销售量；

(2) t 为何值时，政府税收总额最大.

1998 年五

(15) 设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在(假定 $t=0$)就售出，总收入为 R_0(元). 如果

窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

1998 **年六**

(16) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\cdot\mathrm{e}^{-\eta}.$$

1999 **年三**

(17) 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 a. 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

1999 **年八**

(18) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$.

试证：

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

2000 **年六**

(19) 求函数 $y=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

2001 **年四**

(20) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]，$$求 c 的值.

2003 **年八**

(21) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

2004 **年三(18)**

(22) 设某商品的需求函数 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量，

(Ⅰ) 求 $E_d(E_d>0)$（需求量对价格的弹性函数）；

(Ⅱ) 推导 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$（$R$ 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而收益增加.

第三节　一元函数积分学

1997 **年一(2)**

(1) 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

1998 年一(2)

(2) $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx =$ ________.

1999 年一(1)

(3) 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx =$ ________.

2000 年一(2)

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}} =$ ________.

2004 年一(3)

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ -1, x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1) dx =$ ________.

1997 年二(1)

(6) 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt, g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$，则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

1999 年二(1)

(7) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数

2001 年二(2)

(8) 设 $g(x) = \int_0^x f(u) du$，其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+1) & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1) & 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间(0,2)内(　　)

(A) 无界　　(B) 递减　　(C) 不连续　　(D) 连续

1997 年六

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(0) \geqslant 0$. 试证函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t) dt & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调不减(其中 $n > 0$).

1998 年七

(10) 设有两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(1) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

1999 年七

(11) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

2000 年七

(12) 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

2000 年八

(13) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.

试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

2001 年六

(14) 已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S. (1) 问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？(2) 求出此最大值.

2001 年七

(15) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x \quad (k>1),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

2002 年三

(16) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

2002 年五

(17) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

2002 年六

(18) 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

2002 年八

(19) 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质，证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2004 年三(17)

(20) 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且满足$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b], \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)^{dt}$,证明:$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

第四节　多元函数微积分学

2000 年一(1)

(1) 设 $z = f(xy,\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$,其中 f、g 均可微,则$\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

2002 年一(2)

(2) 交换积分次序:$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x =$ ________.

2003 年一(3)

(3) 设 $a>0, f(x)=g(x)=\begin{cases} a, 若\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, 其他, \end{cases}$ 而 D 表示全平面,则

$I = \iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

2004 年一(2)

(4) 函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y] = x + g(y)$ 确定,其中函数 $g(y)$ 可微,且 $g(y) \neq 0$,则$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} =$ ________.

1999 年二(2)

(5) 设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域,则 $f(x,y)$ 等于(　　)

(A)xy　　(B)$2xy$　　(C)$xy+\frac{1}{8}$　　(D)$xy+1$

2003 年二(2)

(6) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)取得极小值,则下列结论正确的是(　　)

(A)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零

(B)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零

(C)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零

(D)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在

1997 年四

(7) 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^x - xz = 0$ 所确定,求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

1997 年八

(8) 设函数 $f(t)$ 在$[0,+\infty)$上连续,且满足方程 $f(t) = \mathrm{e}^{4\pi t^2} + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f(\frac{1}{2}$

$\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求 $f(t)$.

1998 **年三**

(9) 设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$,求 $\mathrm{d}z$ 与$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1998 **年四**

(10) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$,求$\iint\limits_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

1999 **年四**

(11) 计算二重积分$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2,y=0,y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

1999 **年五**

(12) 设生产某种产品必须投入两种要素,x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量,Q为产出量,若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$,其中 $\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2,试问:当产出量为 12 时,两要素各投入多少可以使得投入总费用最小?

2000 **年四**

(13) 计算二重积分$\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$,其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 和直线$y=-x$ 围成的区域.

2000 **年五**

(14) 假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数分别是

$p_1=18-2Q_1,p_2=12-Q_2$,

其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨),Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量,单位:吨),并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$,

其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量,即 $Q=Q_1+Q_2$.

(1) 如果该企业实行价格差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量和价格,使该企业获得最大利润;

(2) 如果该企业实行价格无差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格,使该企业的总利润最大化;并比较两种价格策略下的总利润大小.

2001 **年三**

(15) 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数,又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:

$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

2001 **年五**

(16) 求二重积分$\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值,其中 D 是由直线 $y=x,y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

2002 年四

(17) 设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 du.

2003 年四

(18) 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2+y^2)]$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

2003 年五

(19) 计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$.

2004 年三(16)

(20) 求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

第五节　无穷级数

1999 年一(2)

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=$ ________.

2003 年二(3)

(2) 设 $p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

2004 年二(10)

(3) 设有以下命题

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

④ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛