

诺贝尔物理学奖获得者 玻恩 经典名著

Born & Wolf

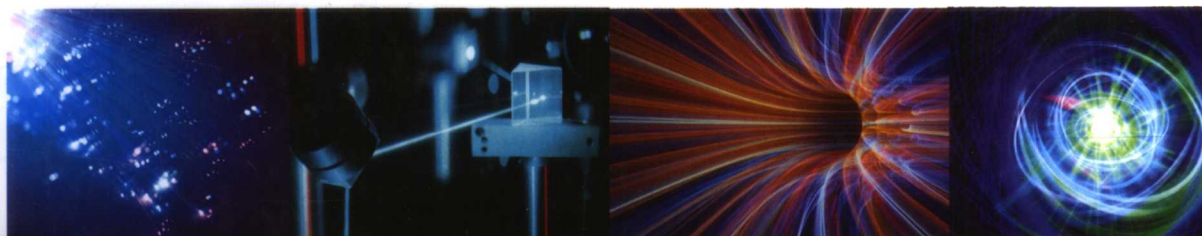
Principles of Optics

Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light
Seventh (Expanded) Edition

光学原理

第七版

下册



Principles of
Optics

7th expanded edition

Max Born and
Ewald Wolf

Electromagnetic Theory of Propagation,
Interference and Diffraction of Light

光的传播、干涉和衍射的电磁理论

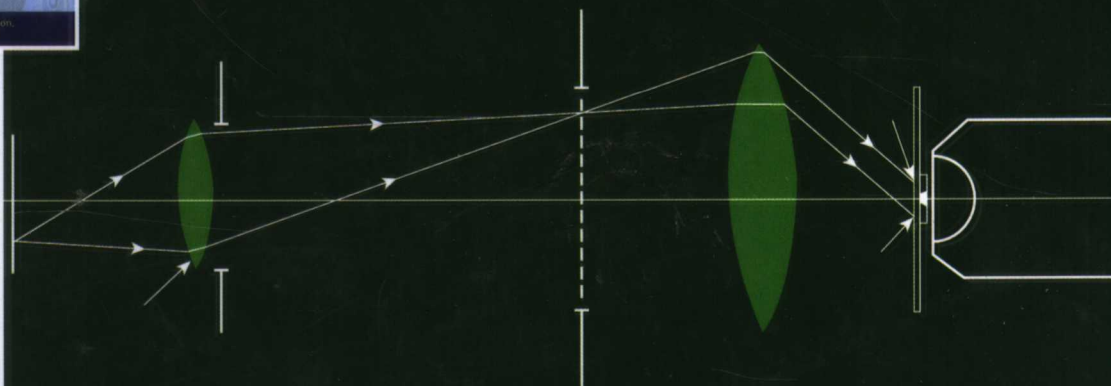
[德] 马科斯·玻恩

[美] 埃米尔·沃耳夫

著

杨葭荪

译



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

<http://www.phei.com.cn>

光 学 原 理

(第七版) (下册)

Principles of Optics:
Electromagnetic Theory of Propagation,
Interference and Diffraction of Light
Seventh (Expanded) Edition

[德] 马科斯·玻恩 著
[美] 埃米尔·沃耳夫

杨葭荪 译

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是一部经典光学世界名著。全书以麦克斯韦宏观电磁理论为基础,系统阐述光在各种媒质中的传播规律,包括反射、折射、偏振、色散、干涉、衍射、散射以及金属光学(吸收媒质)和晶体光学(各向异性媒质)等。几何光学也作为极限情况($\lambda \rightarrow 0$)而纳入麦克斯韦方程系统,并从衍射观点讨论了光学成像的像差问题。新版增加了计算机层析术、宽带光干涉、非均匀媒质光散射等内容。

本书引文丰富且所涉广泛,上溯历史,下至近代,旁及有关学科和应用,故能于一专著中给读者以宽阔视野与充分求索之空间。全书共十五章,中译本分上下册出版。上册包括“历史引言”和前八章,内容多属基础;下册包括后七章和附录,层次较深。

本书基础性、系统性和学术性兼备,可供光学教学与研究人员包括高年级本科生、研究生等阅读和参考。

This work is an authorized translation of the 2002 reprint, with corrections, of the seventh (expanded) edition published by Cambridge University Press in 1999.

© Estate of Max Born and Emil Wolf 1999.

本书中文简体版专有出版权由 Cambridge University Press 授予电子工业出版社,未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权贸易合同登记号 图字:01-2004-0903

图书在版编目(CIP)数据

光学原理.下册:第7版/(德)玻恩(Born, M.), (美)沃耳夫(Wolf, E.)著;杨葭荪译.

北京:电子工业出版社,2006.4

书名原文:Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, Seventh (Expanded) Edition

ISBN 7-121-02424-1

I. 光... II. ①玻... ②沃... ③杨... III. 光学 IV. 043

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第024451号

责任编辑:窦 昊

印 刷:北京天宇星印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

经 销:各地新华书店

开 本:787 × 1092 1/16 印张:25 字数:624千字

印 次:2006年4月第1次印刷

定 价:53.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换;若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

下册出版说明

《光学原理》第七版中译本的下册是一全新译本,其原有章节亦全部重新由本次译者独立专注译出,以求提高译文质量,出版时间因而推迟,望读者鉴谅。

为便于使用者查阅所需资料,译本末尾特增加了全书内容索引和著者索引,内容索引仍按原书索引英文字母为序而并列中文对照,以便于查索及简化编排工作。

下册中所包含的新增内容计有:第 10 章 10.5 节,宽带光的干涉和衍射;关联感生的光谱改变;第 13 章整个一章,不均匀媒质产生的散射,各含有启迪性的课题,甚具阅读研究之价值。

目 录

第 9 章 像差的衍射理论	429
9.1 存在像差时的衍射积分	430
9.1.1 衍射积分	430
9.1.2 位移定理;参考球的更换	431
9.1.3 强度和波阵面平均形变之间的关系	433
9.2 像差函数的展开	433
9.2.1 泽尼克圆多项式	433
9.2.2 像差函数的展开	436
9.3 初级像差的容限条件	438
9.4 单种像差衍射图样	442
9.4.1 初级球差	444
9.4.2 初级彗差	447
9.4.3 初级像散	447
9.5 广延物的成像	450
9.5.1 相干照明	450
9.5.2 不相干照明	453
第 10 章 部分相干光的干涉和衍射	459
10.1 引言	459
10.2 实多色场的复数表示	461
10.3 光束的关联函数	466
10.3.1 两束部分相干光的干涉;互相干函数和复相干度	466
10.3.2 互相干的谱表示	469
10.4 准单色光的干涉和衍射	471
10.4.1 准单色光的干涉;互强度	472
10.4.2 扩展不相干准单色光源光场互强度和相干度的计算	474
(a) 范西特-泽尼克定理	474
(b) 霍普金斯公式	478
10.4.3 一个例子	479
10.4.4 互强度的传播	484
10.5 宽带光的干涉和谱相干度;关联感生的光谱改变	486
10.6 几项应用	491
10.6.1 扩展不相干准单色光源像中的相干度	491

10.6.2	聚光器对显微镜分辨率的影响	494
(a)	中肯照明	494
(b)	科勒照明	496
10.6.3	部分相干准单色照明成像	498
(a)	互强度在光学系统中的传输	498
(b)	透射照明下物的成像	500
10.7	有关互相干的几个定理	503
10.7.1	不相干光源光场互相干的计算	503
10.7.2	互相干的传播	505
10.8	严格的部分相干性理论	506
10.8.1	互相干的波动方程	506
10.8.2	互相干传播定律的严格表述	508
10.8.3	相干时间和有效光谱宽度	511
10.9	准单色光的偏振特性	514
10.9.1	准单色平面波的相干矩阵	515
(a)	完全非偏振光(自然光)	519
(b)	完全偏振光	519
10.9.2	几种等效表示;光波的偏振度	520
10.9.3	准单色平面波的斯托克斯参量	523
第 11 章	严格的衍射理论	526
11.1	引言	526
11.2	边界条件和表面电流	527
11.3	平面屏衍射;电磁形式的巴比涅原理	529
11.4	平面屏产生的二维衍射	530
11.4.1	二维电磁场的标量性质	530
11.4.2	平面波组成的角谱	530
11.4.3	对偶积分方程形式的表述	533
11.5	平面波的半平面二维衍射	534
11.5.1	E 偏振情况的对偶积分方程之解	534
11.5.2	解的非涅耳积分表示	536
11.5.3	解的性质	539
11.5.4	H 偏振情况的解	543
11.5.5	一些数值计算	544
11.5.6	与近似理论和实验结果的比较	546
11.6	平面波的半平面三维衍射	547
11.7	定域光源所产生的场在半平面上的衍射	550
11.7.1	一个平行于衍射边的线电流	550

11.7.2	一个偶极子	554
11.8	其他问题	556
11.8.1	两个平行半平面	556
11.8.2	平行错位叠加半平面的无穷堆垛	558
11.8.3	一条窄带	559
11.8.4	其他相关问题	560
11.9	解的惟一性	561
第 12 章	光在超声波上的衍射	562
12.1	现象的定性描述和麦克斯韦微分方程的理论处理(概述)	562
12.1.1	现象的定性描述	562
12.1.2	麦克斯韦方程的理论处理(概述)	564
12.2	超声衍射的积分方程处理方法	567
12.2.1	E 偏振情况的积分方程	568
12.2.2	积分方程的试探解	569
12.2.3	衍射谱中和反射谱中的光波振幅表达式	572
12.2.4	逐次逼近法的方程解	572
12.2.5	一些特殊情况的一级和二级谱线强度表达式	575
	(a) $\delta/\xi \ll 1$ 并且 ξ 远大于 1	575
	(b) $\xi \approx \frac{1}{2}, \delta \ll 1$	575
	(c) 正入射($\xi = 0$), $\delta \ll 1$	576
12.2.6	一些定性结果	576
12.2.7	拉曼-纳斯近似	578
第 13 章	不均匀媒质产生的散射	580
13.1	标量散射理论基础	580
13.1.1	基本积分方程的推导	580
13.1.2	一级玻恩近似	583
13.1.3	周期势产生的散射	587
13.1.4	多重散射	590
13.2	散射势重建衍射层析术原理	592
13.2.1	散射场的角谱表示	593
13.2.2	衍射层析术的基本定理	595
13.3	光学截面定理	598
13.4	倒易关系	604
13.5	Rytov 级数	606
13.6	电磁波的散射	608
13.6.1	电磁散射理论的积分-微分方程	608

13.6.2	远场	609
13.6.3	电磁波散射的光学截面定理	611
第 14 章	金属光学	614
14.1	波在导体中的传播	614
14.2	金属面的反射和折射	618
14.3	金属光学常数电子论初探	626
14.4	波在分层导电媒质中的传播;金属膜理论	628
14.4.1	透明基片上的单层吸收膜	629
14.4.2	吸收基片上的单层透明膜	633
14.5	导电球产生的衍射;米氏理论	634
14.5.1	问题的数学解	635
	(a) 场的德拜势表示	635
	(b) 场分量的级数展开式	639
	(c) 缔合勒让德函数和柱面函数有关公式一览	646
14.5.2	米氏公式的一些结果	647
	(a) 分波	647
	(b) 两种极端情况	648
	(c) 散射光的强度和偏振	652
14.5.3	总散射和消光	656
	(a) 某些一般考虑	656
	(b) 计算结果	657
第 15 章	晶体光学	661
15.1	各向异性媒质的介电常数	661
15.2	各向异性媒质中单色平面波的结构	663
15.2.1	相速度和光线速度	663
15.2.2	光在晶体中传播的非涅耳公式	666
15.2.3	确定传播速度和振动方向的几何作图法	669
	(a) 波法线椭球	669
	(b) 光线椭球	671
	(c) 法线曲面和光线曲面	672
15.3	单轴晶体和双轴晶体的光学特性	673
15.3.1	晶体的光学分类	673
15.3.2	光在单轴晶体中的传播	674
15.3.3	光在双轴晶体中的传播	676
15.3.4	晶体折射	679
	(a) 双折射	679
	(b) 圆锥折射	681

15.4	晶体光学测量	686
15.4.1	尼科耳棱镜	686
15.4.2	补偿器	687
	(a) 1/4 波片	687
	(b) 巴比涅补偿器	688
	(c) 索累补偿器	689
	(d) Berek 补偿器	690
15.4.3	晶片干涉	690
15.4.4	单轴晶片的干涉图	694
15.4.5	双轴晶片的干涉图	696
15.4.6	晶体媒质的光轴定位和主折射率测定	698
15.5	应力双折射和形序双折射	699
15.5.1	应力双折射	699
15.5.2	形序双折射	702
15.6	吸收晶体	704
15.6.1	光在吸收型各向异性媒质中的传播	704
15.6.2	吸收晶片的干涉图	709
	(a) 单轴晶体	709
	(b) 双轴晶体	710
15.6.3	二向色性偏振器	711
附录 A	变分法	714
A.1	欧拉方程——极值的必要条件	714
A.2	希尔伯特独立性积分和哈密顿-雅可比方程	715
A.3	致极曲线场	717
A.4	从哈密顿-雅可比方程的解确定全部致极曲线	719
A.5	哈密顿正则方程	720
A.6	自变量不显现在被积函数中时的特殊情况	721
A.7	不连续地段	722
A.8	Weierstrass 条件和勒让德条件(极值的充分性条件)	724
A.9	当路线的一端点被约束在一曲面上时变分积分的极小值	726
A.10	雅可比极小值判据	727
A.11	例一:光学	727
A.12	例二:质点力学	729
附录 B	光学、电子光学和波动力学	732
B.1	基本形式的哈密顿类似	732
B.2	变分形式的哈密顿类似	734
B.3	自由电子的波动力学	737

B.4 光学原理对电子光学的应用	738
附录 C 积分的渐近近似	740
C.1 最陡下降法	740
C.2 稳定相法	744
C.3 二重积分	745
附录 D 狄拉克 δ 函数	747
附录 E 洛伦兹-洛伦茨定律严格推导所用的一个数学引理(2.4.2 节)	752
附录 F 电磁场中不连续态的传播(3.1.1 节)	754
F.1 各场矢量中不连续变化的相互关系	754
F.2 运动不连续面处的场	756
附录 G 泽尼克圆多项式(9.2.1 节)	758
G.1 一些一般考虑	758
G.2 径向多项式 $R_n^{*m}(\rho)$ 的显表达式	760
附录 H 谱相干度不等式 $ \mu_{12}(\nu) \leq 1$ 的证明(10.5 节)	764
附录 I 倒易不等式的证明(10.8.3 节)	765
附录 J 两个积分的计算(12.2.2 节)	767
附录 K 标量波场中的能量守恒(13.3 节)	770
附录 L 琼斯引理的证明(13.3 节)	772
著者索引	774
英汉内容索引	790

第9章 像差的衍射理论

第5章在几何光学的基础上研究了各种像差对成像的影响。在该处理中,像被看成是几何光线与像平面交点所形成的图形,但因光线聚焦失锐而变得有些模糊。因为几何光学给出的是一种近似模型,仅在波长很短的极限情况下有效,故可预料当像差变小时几何光学必将逐渐失去其有效性。例如,一个理想的球面会聚波从一圆孔射出时,在极短波长极限情况下几何光学预言焦平面上焦点的强度为无穷大,其他各处强度皆为零,而实际情况却如8.5.2节所证,像的中央是一个亮区,周围环绕着明暗相间的圆环(爱里斑)。在焦平面附近,光的分布状态亦呈现复杂性质(见图8.41),比几何光学所设想的要复杂得多。这就促使我们采用衍射理论来研究像差的影响。

这一领域最早的研究始自瑞利^①。他的主要贡献是对成像系统所可容许的球差给出一个定量判据(在9.3节中讨论),该项判据,其形式经推广后,业已广为用来确定光学仪器可以容许的像差最大量,即所谓像差容限。之后,该项课题经众家之研究而大为推进,他们仔细探讨了各种不同像差的影响^②,其中尤以 Steward, Picht 和玻恩^③论著为广,可特予提出。

用衍射来处理存在像差时的成像问题,奈波尔(Nijboer)^④做了极其大量的工作,其中一部分系同泽尼克合作完成。奈波尔的工作在小像差的影响方面,即波阵面偏离球面仅在一个波长以内。大像差影响的衍射理论研究,则归于 van Kampen^⑤,他借助渐近近似求解。该处理的出发点是将稳定相原理的形式推广到二元函数。但此原理的严格表述后来才由福克(J. Focke)给出(见附录C,第745页)。

本章主要部分是讲述奈波尔-泽尼克理论,并将研讨受各种初级像差影响的衍射像结构。最后一节(9.5节)将从点物跨越到广延物,并研究相干照明和非相干照明成像。部分相干照明成像则在第10章中讨论。

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), **8**(1879), 403. 重印于其 *Scientific Papers*, Vol. 1 (Cambridge, Cambridge University Press, 1899), p. 428.

② E. Wolf 对像差和衍射理论做了历史回顾,其文载于 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **14**(1951), 95.

③ G. C. Steward, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, **255**(1925), 131; 及其书著 *The Symmetrical Optical System* (Cambridge, Cambridge University Press, 1928). J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4), **77**(1925), 685. *ibid.*, **80**(1926), 491; 及其书著 *Optische Abbildung* (Braunschweig, Vieweg, 1931). M. Born, *Naturwissenschaften*, **20**(1932), 921; 及其书著 *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), p. 202.

④ B. R. A. Nijboer, Thesis, University of Groningen, 1942. 其主要部分并发表于 *Physica*, **10**(1943), 679; *ibid.*, **13**(1947), 605; F. Zernike and B. R. A. Nijboer, contribution to *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227. K. Nienhuis and B. R. A. Nijboer, *Physica*, **14**(1948), 590. 曾讨论将该理论推广到更大一些的像差。此外需要提到的还有 K. Nienhuis (University of Groningen, 1948) 的一篇学位论文, 内容主要有像差影响的实验研究。9.4 节中翻印有几张 Nienhuis 所拍摄的漂亮照片。

在微波频段, 当存在像差时, 关于像区结构的实验研究, M. P. Bachynski 和 G. Bekefi 曾有过报道, 见第407页所引有关论文, 亦见 *Trans. Inst. Radio Eng.*, AP-4(1956), 412.

⑤ N. G. van Kampen, *Physica*, **14**(1949), 575; *ibid.*, **16**(1950), 817; *ibid.* **25**(1958), 437.

9.1 存在像差时的衍射积分

9.1.1 衍射积分

考虑一个置有一单色点光源 P_0 的共轴光学系统(即合轴组——译者注)(见图 9.1)。取一笛卡儿坐标系,令其原点位于 P_0 的高斯像点 P_1^* , z 轴沿 CP_1^* , C 为出射光瞳中心。 y 轴则取在子午面(包含 P_0 和系统之轴的平面)上。 P_0 和 P_1^* 的离轴距离分别用 Y_0 和 Y_1^* 表示。

同第 5 章中一样,出射光瞳区中波阵面的形变将用像差函数 Φ 来描写。设 $\bar{Q}$ 和 Q 是像空间中某条光线分别与过 C 点的实际波阵面和高斯参考球的交点。假设像空间中的折射率为 1, 则 Φ (在图 9.1 中取为正)代表沿该光线所测的距离 $\bar{Q}Q$ 。

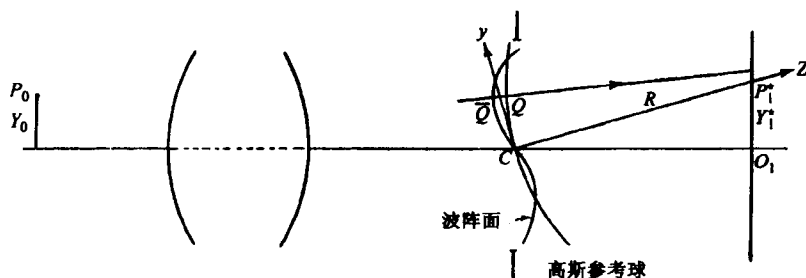


图 9.1 参考系的选择和符号

设 R 代表高斯参考球的半径 CP_1^* , s 是 Q 和像区中任意一点 P 之间的距离。 Q 点处的场扰动用 $Ae^{ik(\Phi-R)}/R$ 来表示,其中 A/R 是 Q 点处的振幅。按照惠更斯-菲涅耳原理, P 点的扰动由下式给出:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Ae^{-ikR}}{R} \iint \frac{e^{ik[\Phi+s]}}{s} dS, \quad (1)$$

式中积分范围为参考球面上将出射光瞳大致覆盖住的地区。(1)式中曾假设所涉及的角都很小,因而参考球上倾斜因子的变化可予忽略。此外还曾假设波阵面上各处的振幅基本不变,因而 A 可提到积分号外。

设 (ξ, η, ζ) 是 Q 点的坐标, (x, y, z) 是 P 点的坐标,并设 a 是出射光瞳的半径。按照 8.8 节对无像差会聚球面波这一特殊情况($\Phi \equiv 0$)的处理,令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a\rho \sin \theta, & x &= r \sin \psi, \\ \eta &= a\rho \cos \theta, & y &= r \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

经过同 § 8.8(2)和 § 8.8(9)^① 一样的运算,最后得到

$$k(s-R) = -v\rho \cos(\theta-\psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u, \quad (3)$$

式中 u 和 v 是 P 点的两个“光学坐标”,即

① 这里的 R 对应于 8.8 节的 f 。值得注意的是,如采用 § 8.8(2)和 § 8.8(3),则衍射积分可再表成平面波角谱形式 [见 J. Focke, *Optica Acta*, 3(1956), 110]。

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R} \right)^2 z, \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R} \right) \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

为可方便处理,现将 Φ 看成为 Y_1^*, ρ 和 θ 的函数:

$$\Phi = \Phi(Y_1^*, \rho, \theta). \quad (5)$$

高斯参考球的面元为 $dS = a^2 \rho d\rho d\theta$, 而且如果 CP_1^* 与系统之轴的夹角很小,则积分范围可取为 $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$. 此外,对像区中的观察点而言,被积函数分母中的 s 可用 R 代替. 因此将(3)式代入(1)式即得到

$$U(P) = U(u, v, \psi) = -\frac{i A a^2}{\lambda R^2} e^{i(\frac{A}{R})^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta, \quad (6)$$

所以 P 点的强度

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left(\frac{A a^2}{\lambda R^2} \right)^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \quad (7)$$

按照(7)式,如果不存在像差,即 $\Phi = 0$ 时,则高斯像点 P_1^* ($u = v = 0$) 处的强度将等于

$$I^* = \pi^2 \left(\frac{A a^2}{\lambda R^2} \right)^2, \quad (8)$$

为方便起见,现将强度 $I(P)$ 表成为强度 I^* 的百分数,即取归一化强度^①

$$i(P) = \frac{I(P)}{I^*} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \quad (9)$$

没有像差时,高斯像点的强度为一极大. 存在像差时,情况一般将不再如此,这时强度极大之点可称为衍射焦点^②. 人们常仅关注某一特别观察面上的极大强度,这一强度当按(9)式归一化时,叫做 Strehl 强度^③.

从(9)式可立即推导出几个稍后将要用到的结果,兹分述于下.

9.1.2 位移定理;参考球的更换

设 Φ 和 Φ' 是两个像差函数,二者之间存在下列关系:

$$\Phi' = \Phi + H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M, \quad (10)$$

式中 H, K, L 和 M 均为 λ 量级的常数. 此外设 $i(u, v, \psi)$ 和 $i'(u, v, \psi)$ 为相对应的两个归一化强度. 于是由(9)式

$$i(u, v, \psi) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i f(u, v, \psi; \rho, \theta)} \rho d\rho d\theta \right|^2, \quad (11)$$

式中

① 这里归一化强度符号 i 当不致与 $\sqrt{-1}$ 的符号 i 混淆,因为前者总是同自变量一起出现,例如 $i(\rho), i(\mu, v, \psi)$, 等等.

② 一般来说,衍射焦点当然可多于一个,但如果像差足够小,衍射焦点就只有一个.

③ 此词概念出自 K. Strehl, Z. f. Instrumkde., 22(1902), 213, 他称之为 "Definitionshelligkeit" (德文,可译为“明亮度”——译者注). 英文文献中常采用 "definition" (明晰度) 一词,有欠妥当. 近来, "Strehl ratio" (Strehl 比) 一词亦有人使用. 见,例如, V. N. Mahajan, J. Opt. Soc. Amer., 71(1981), 75 和 *ibid.*, 72(1982), 1258.

$$f(u, v, \psi; \rho, \theta) = k\Phi - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2, \quad (12)$$

i' 的表达式与此类似。按照(10)式,上式亦可写成如下形式:

$$\begin{aligned} f(u, v, \psi; \rho, \theta) &= k\Phi' - k[H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M] - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 \\ &= k\Phi' - v'\rho \cos(\theta - \psi') - \frac{1}{2}u'\rho^2 - kM \\ &= f'(u', v', \psi'; \rho, \theta) - kM, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$u' = u + 2kH, \quad v' \sin \psi' = v \sin \psi + kK, \quad v' \cos \psi' = v \cos \psi + kL. \quad (14)$$

据(2)和(4)两式可知,(14)式代表下列变换:

$$z' = z + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 H, \quad x' = x + \left(\frac{R}{a}\right) K, \quad y' = y + \left(\frac{R}{a}\right) L. \quad (15)$$

因此由(11)和(13)两式得到

$$i(u, v, \psi) = i'(u', v', \psi'). \quad (16)$$

这样我们就建立了下列位移定理:一个像差函数,加上一项 $H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M$ 时,其中 H, K, L 和 M 均为 λ 量级的常数,结果并不改变焦点附近三维强度分布的形态,而仅仅是使该分布整体上按变换式(15)产生位移;位移量是:沿主方向 CP_1^* 为 $2(R/a)^2 H$ (远离出射光瞳),沿正 x 和正 y 方向分别为 $(R/a)K$ 和 $(R/a)L$ 。

(10)式右方所加之项可解释为代表参考球的更换。假设选择一个新参考球,其中心位于像区中的 $P'(x', y', z')$ 点,半径为 R' ,而且离高斯参考球最多不超过几个波长。设光线 $\overline{QQ}$ 与新参考球相交于 N 点,这时以该新球为参考面的波像差 Φ' 为(见图 9.2)

$$\Phi' = \overline{QN} = \overline{QQ} - NQ \approx \overline{QQ} - NG, \quad (17)$$

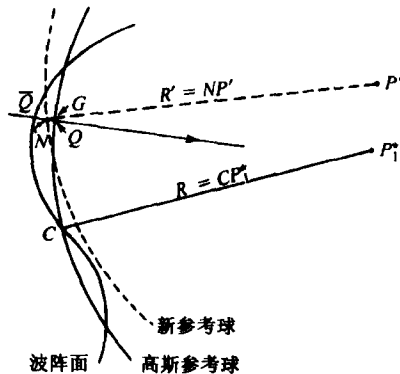


图 9.2 参考球的更换

式中 G 是直线 NP' 与高斯参考球的交点,像空间中的折射率同前仍假设为 1。这里 $\overline{QQ} = \Phi$ 是以高斯球为参考面时的波像差,而且 $NG = NP' - GP' = R' - s$,其中 s 代表 G 到 P' 的距离。因此(17)式可写成为

$$\Phi' \approx \Phi + s - R' = \Phi + \frac{\lambda}{2\pi} \left[-v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u \right] + (R - R'), \quad (18)$$

其中曾用了(3)式关系。这里 u, v 和 ψ 仍由(3)和(4)两式给出,但需用 x', y', z' 替代原来的 x, y, z 。关系式(18)可写成(10)式的形式,其中取

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 z', \quad K = -\left(\frac{a}{R} \right) x', \quad L = -\left(\frac{a}{R} \right) y', \quad M = z' + R - R'. \quad (19)$$

9.1.3 强度和波阵面平均形变之间的关系

当像差很小时,参考球球心处的强度可用波像差的方均值表出。设参考球球心位于像区中的 P 点, Φ_p 是以此球为参考的波像差。于是,按照(9)和(18)两式, P 点处的归一化强度可表成下列形式:

$$i(P) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_p} \rho \, d\rho \, d\theta \right|^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [1 + ik\Phi_p + \frac{1}{2}(ik\Phi_p)^2 + \cdots] \rho \, d\rho \, d\theta \quad (20)$$

设 $\overline{\Phi_p^n}$ 代表 Φ_p n 次幂的平均值,即

$$\overline{\Phi_p^n} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_p^n \rho \, d\rho \, d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\rho \, d\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_p^n \rho \, d\rho \, d\theta. \quad (21)$$

如果假设像差非常小,因而可将(20)式中 $k\Phi_p$ 的三次和更高次幂略去,则 P 点的归一化强度可写成下列形式:

$$i(P) \approx |1 + ik\overline{\Phi_p} - \frac{1}{2}k^2\overline{\Phi_p^2}|^2 = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 [\overline{\Phi_p^2} - (\overline{\Phi_p})^2]. \quad (22)$$

上式右边方括号中的量是波阵面的“方均形变” $(\Delta\Phi)^2$,

$$(\Delta\Phi_p)^2 = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\Phi_p - \overline{\Phi_p})^2 \rho \, d\rho \, d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\rho \, d\theta} = \overline{\Phi_p^2} - (\overline{\Phi_p})^2, \quad (23)$$

所以(22)式可写成为

$$i(P) \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\Delta\Phi_p)^2. \quad (24)$$

这一公式意味着,当像差很小时,焦点区域中高斯参考球球心处的归一化强度与像差的性质无关,而且比理想值1所小之量正比于波阵面的方均形变^①。

9.2 像差函数的展开

9.2.1 泽尼克圆多项式

在第5章中根据几何光学讨论像差的影响时,曾将像差函数 Φ 展开成一幂级数。在本章

① 当光瞳的照度不均匀时,(24)式仍然有效,只要设 $(\Delta\Phi_p)^2$ 代表波阵面的振幅加权方均形变即可[见 V. N. Mahajan, *loc. cit.*, (1981)]。

的处理中,须对单位圆进行积分,这就更加适宜将 Φ 展开成单位圆域内正交的多项式完全集^①。具有该种性质的多项式全集可有多种构成形式,然而泽尼克^②所引进的这种集与众不同,还具有简单的不变性特性。附录 G 将说明可用什么方法推导该泽尼克圆多项式,并讨论它们的某些特性。这里仅概括列出所需的一些公式。

泽尼克圆多项式是两个实变量 X, Y 的多项式 $V_n^l(X, Y)$, 用极坐标 ($X = \rho \sin \theta, Y = \rho \cos \theta$) 表出时,其形式为

$$V_n^l(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) = R_n^l(\rho) e^{il\theta}, \quad (1)$$

式中 $l \geq 0$, 并且 $n \geq 0$, 均为整数, $n \geq |l|$, 而 $n - |l|$ 是偶数。其正交性和归一化性质则由下列公式表出:

$$\iint_{X^2+Y^2 \leq 1} V_n^{l*}(X, Y) V_{n'}^{l'}(X, Y) dX dY = \frac{\pi}{n+1} \delta_{ll'} \delta_{nn'}, \quad (2)$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克符号, 星号表示复共轭。径向函数 $R_n^l(\rho)$ 是 ρ 的多项式, 由 $\rho^n, \rho^{n-2}, \dots, \rho^{|l|}$ 各次幂组成, 并且如附录 G 所证, 与雅可比多项式(有穷超几何级数)有密切关系。由(1)和(2)两式可见, 该径向多项式满足下列关系式:

$$\int_0^1 R_n^l(\rho) R_{n'}^l(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'}. \quad (3)$$

其具体形式由下列公式($m = |l|$)给出:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! \rho^m} \left[\frac{d}{d(\rho^2)} \right]^{\frac{n-m}{2}} [(\rho^2)^{\frac{n+m}{2}} (\rho^2 - 1)^{\frac{n-m}{2}}] \quad (4)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}. \quad (5)$$

其归一化则如此选定, 即对所有可允许的 n 和 m 值, 有

$$R_n^{\pm m}(1) = 1. \quad (6)$$

径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 有下列生成函数

$$\frac{\left[1 + z - \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}\right]^m}{(2z\rho)^m \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} z^s R_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \quad (7)$$

当 $m = 0$ 时, 上式左方化为自变量为 $2\rho^2 - 1$ 的勒让德多项式^③生成函数, 所以

$$R_{2n}^0(\rho) = P_n(2\rho^2 - 1). \quad (8)$$

表 9.1 给出该径向多项式前几个 m, n 值的显函数形式。

① 此处“完全”这个词意指, 任何相当规范的函数均可展开成该集函数的级数。关于该词的更精确定义见, 例如, R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (New York, Interscience Publishers, 1st English edition, 1953), pp. 51 - 54。

② F. Zernike, *Physica*, 1(1934), 689。

③ 见, 例如, R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit.*, p. 85。

表 9.1 $m \leq 8, n \leq 8$ 的各径向多项式 $R_n^m(\rho)$

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1		$2\rho^2 - 1$		$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$		$20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$		$70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$
1		ρ		$3\rho^3 - 2\rho$		$10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$		$35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho$	
2			ρ^2		$4\rho^4 - 3\rho^2$		$15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2$		$56\rho^8 - 105\rho^6 + 60\rho^4 - 10\rho^2$
3				ρ^3		$5\rho^5 - 4\rho^3$		$21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3$	
4					ρ^4		$6\rho^6 - 5\rho^4$		$28\rho^8 - 42\rho^6 + 15\rho^4$
5						ρ^5		$7\rho^7 - 6\rho^5$	
6							ρ^6		$8\rho^8 - 7\rho^6$
7								ρ^7	
8									ρ^8