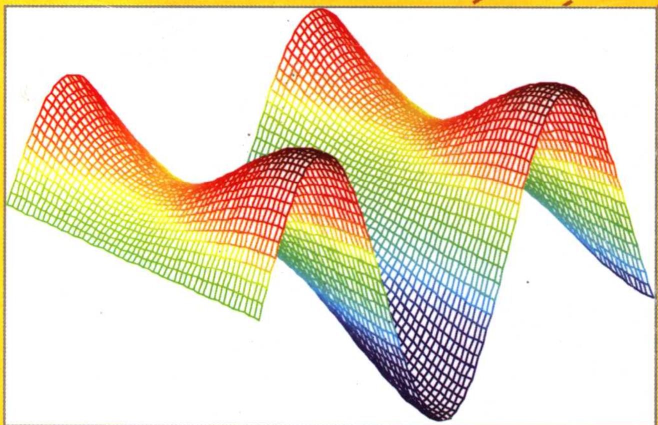
工程科学中的广义延拓逼近法

施许立　颜毅华　徐国华　著



科学出版社
www.sciencep.com

工程科学中的广义延拓逼近法

施浒立　颜毅华　徐国华　著

中国科学院创新重大课题资助

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书在插值法和拟合法的基础上，提出了集两者长处于一体的广义延拓逼近法，亦称广义插值方法. 在本书中充分阐述了该方法的设计理念、模型及求解方法，介绍了这一新方法应用在一元变量、二元变量及多元变量时的数学模型，以及它在工程科学中的应用，包括在图形生成、误差修正、数据处理、有限元法和边界元法中的应用. 除了介绍内插应用以外， 本书还探索了它的外推应用.

本书可供从事工程科学及科学计算方面的大学生、研究生， 以及工程技术人员和科技工作者在数据处理、数据分析、图形生成、精度分析时参阅和应用.

图书在版编目(CIP)数据

工程科学中的广义延拓逼近法/施浒立， 颜毅华， 徐国华著. —北京：科学出版社， 2005

ISBN 7-03-015606-4

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①施… ②颜… ③徐… Ⅲ. 插值法-应用-工程技术 Ⅳ. TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 051948 号

责任编辑：吕 虹 祖翠娥／责任校对：李奕萱

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005年10月第一次印刷 印张：10 1/2

印数：1—2 000 字数：192 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

序

数学是六大基础学科：数、理、化、天、地、生之一. 基础学科、应用学科均来自人类认识世界和改造世界的实践活动. 数学是众多基础学科和应用学科中关于数、形的高度概括和提炼，是数、形及其运算的科学. Hilbert 在 1900 年世界数学大会上指出，**数学是一切精确自然科学知识的基础**. 今天，数学在向其他学科渗透的同时，日益起着统一、综合各种科技知识的作用. 在某种意义上说，数学似乎日益成为科学发展的主要因素. 除了数学家外，应用科学家、工程专家及其他科学工作者也为数学的发展和应用不断提出新的课题并构造新的方法，作出了许多重要贡献.

施浒立、颜毅华、徐国华教授，他们并不是专门从事数学研究的. 施浒立和颜毅华曾是大连理工大学钱令希院士的博士生. 他们在多年从事天文学研究和其他应用技术研究的实践活动中，学习了插值和拟合方法等数学知识，提出了集两者特性于一体的广义延拓逼近方法，并应用于有限元法、边界元法和图形勾画等方面，在工程科学中作出了有益的探索和可喜的应用. 他们的工作虽然是初步的，但可通过数学家和有关人士的指正、帮助与提高，期望这类方法能像 Fourier 分析、运算微积、有限元法等数学方法一样，首先由工程师提出，接着通过数学家的发展，而应用于众多的领域，产生积极的效果.

科学技术包含基础科学、应用科学和工程技术. 当今科学技术的发展特别需要学科交叉，需要各类科学工作者之间的交流与努力，该书的出版就是本着这个目的，我相信这样做会使我国的科学技术更加繁荣昌盛、欣欣向荣.

钟万勰

2004 年 11 月

前　　言

由于计算机的飞速发展和数值计算的广泛应用，科学与工程计算中的许多实际问题得到圆满解决，同时科学计算作为一门工具性、方法性和交叉性的新学科也得到了蓬勃的发展和广泛的应用. 科学计算方法就其本质而言，旨在解决科学研究、工程研制和生产实践中提出的大规模、非线性、非均匀和几何形状非规则的各类复杂问题，是数学理论、计算艺术和工程知识的高度结合. 完成复杂系统的数值计算或虚拟仿真，对国民经济、国家安全和科学研究往往有直接的作用.

在学习和工作中，科学计算这门学科使作者受益匪浅，它赋予了作者智慧、方法、勇气和愉悦，同时作者对科学计算方法本身也开始做了一些有益的研究与探索. 本书是作者部分工作成果的介绍、积累和总结，希望通过本书的出版能扩大交流、方便切磋、开展讨论.

本书第1章绪论，引用与本方法有关的插值法与拟合法的基本知识，分析了这两种方法的特点与局限性. 第 2 章详细介绍了方法的设计理念的形成和构筑，建立了广义延拓逼近的数学模型及其求解方法. 第 3~5 章依次介绍了一元变量、二元变量及多元变量的广义延拓逼近法及其应用，这些应用是作者碰到和解决的一些实际问题. 这一方法及其工程应用的有关论文，发表于国内外有关杂志、IMACS大会等国内外学术会议，并登录于会议论文集和国外专著中. 第6章详细介绍了用广义插值模型构造有限单元内的插值函数，从而达到改善有限元单元函数间协调性的目的，根据这一理念创立了广义延拓有限元方法，解决了一些工程实际问题. 第 7 章介绍了应用广义延拓逼近模型构造的广义延拓边界元法. 这一方法应 J. H. Kane，G. Maier 等邀稿出版于“Advance in Boundary Element Techniques”一书中，作为其中一章，由 Springer- Verlag 于 1993 年在 Berlin 出版. 在最后一章里，探索了广义延拓插值模型的外推应用，并在卫星导航相对定位和动态导航中作了应用尝试.

第一作者在两次博士生学习期间有幸师从著名科学家钱令希先生和王绶琯先生，并得到钟万勰教授、程耿东教授、叶尚辉教授、徐国华教授、宋国乡教授等导师们的悉心指导. 本书的工作是在博士研究生期间开始的，这项研究通过颜毅华、丁愿志、余庆、杨劲东、古天龙、王丽萍、蔡显新、祁小燕、王书振、孙希延、赵彦、 吴宅莲等博士研究生和硕士研究生们的努力，逐步探索，日臻完善，

并在多种工程问题上得到应用. 特别是颜毅华研究员, 把这一方法推广到边界元方法上, 构造了广义延拓边界元方法, 并首次将边界元法引入太阳物理研究. 徐国华教授是我的良师挚友, 从攻读硕士研究生开始直至今天他一直指导我的学习与工作, 本书最后由徐国华教授审核定稿. 在本书出版之际, 谨以此书表达作者对导师们辛勤教诲的致谢, 以及对学生们创造性劳动的肯定.

本书初稿在李萌、严挺、郑姝、张巨勇、吴宅莲等帮助完成打印编辑后, 由博士研究生孙希延、王书振、冯珍和赵彦细致地整理了全书内容, 对他们的辛勤劳动和帮助在此深表谢意.

限于时间和水平, 书中会有许多不当之处, 敬请同行和广大读者指正.

施浒立

中科院国家天文台　北京

2004 年 10 月

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　数值计算引论

离散和连续共存在世界中，我们说离散与连续是定义在某一特定的尺度空间里来评说的. 离散与连续本来是相对的，但是也可以相互转化，也就是说在一定的转化条件下，两个概念是可以联系起来的.

自从有了计算机，上述转换与联系变得越来越密切，也更值得人们去思索. 随着计算机和计算技术的发展，人类可以把原本复杂的、难于处理的事物，用数值方法描述、分析和处理. 这引起了数学的变革，使计算数学，特别是数值逼近、数值分析、数据处理得到迅速发展.

在科研和生产中，过去用解析法难以分析处理的问题，现在可用数值方法解决. 例如，对太阳磁场的研究，现在可以用边界元方法和有限元法求解，这两个方法都是用离散数值方法处理求解复杂的微分方程. 又如，为了提高加工中心、数控机床的加工精度，就要提高机床本身组成硬件的精度，是否可以利用数值方法与软件技术呢？若我们能用高精度测量方法测量出硬件的离散点误差，对这些有限的离散误差数据进行数据处理，生成误差修正数据库，实时对设备控制进行修正，就能达到提高设备加工精度的要求. 实现这一修正方法的一个关键是误差数据的辨认、过滤、修正和处理.

所以说，随着计算技术的发展和广泛应用，数值计算方法已成为解决生产和科研问题的金钥匙. 数值计算方法很多，国内外科学家为此做出了极大的努力，做出了很多的贡献. 本书仅论述我们在科学研究和工程研制中，建立的一种数值计算方法 —— 广义延拓逼近方法及其应用.

1.2　插值法简介

在科学研究、工程研制和生产活动中，特别是实验测试和统计分析时，常常会遇到这样的情况：在某一区间 $[a,b]$ 上，变量 x 与 u 之间存在某种函数关系. 但通过实验和观测等手段只知道有限个点上的函数值 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$，当希望通过已知点的函数值求解区间 $[a,b]$ 上的函数关系时，插值方法是解决此类问题的常用且比较经典的方法，它可以构造区间 $[a,b]$ 上的近似函数，且满足观察值 $\varphi(x_i)=u_i(i=1,2,\cdots,n)$. 这样就能从已知的有限个数据出发，求出函数关系或更多个函数值. 所以插值法广泛应用于生产实际、工程研制和科学研究中，已成为数值计算方法的基础，研究意义和实用价值显著.

1.2.1　插值准则

设函数 $u = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在且连续，并在 $n+1$ 个不同的点 $a \leqslant x_0, x_1, \cdots, x_n \leqslant b$ 上分别取值 $u_0, u_1, \cdots, u_n$.

插值的目的就是要在一个性质优良、逼进程度好、便于计算的函数类 Φ 中，求一简单函数 $\varphi(x)$, 使

$$\varphi(x_i) = u_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n \tag{1.1}$$

而在其他 $x = x_i$ 的点上， $\varphi(x)$ 能实现 $f(x)$ 的近似. 上述理念就是一般意义下的插值理念.

通常，称区间 $[a, b]$ 为插值区间，称点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值结点，称 (1.1) 为插值条件，称函数类 Φ 为插值函数类，称 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 在结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的插值函数. 求插值函数 $\varphi(x)$ 的方法称为插值法.

常用的逼近函数有代数多项式、三角多项式和有理函数等. 当选用代数多项式作为插值函数时，相应的插值问题就称为多项式插值问题. 本书为构建广义延拓逼近模型简单起见，仅讨论这类插值问题.

插值法中，最常见、最基本的插值表达式是代数多项式，即

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{1.2}$$

使

$$\varphi_n(x_i) = u_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n \tag{1.3}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为实数， u_i 为自变量 x_i 的对应函数值.

满足插值条件 (1.3) 的多项式 (1.2), 称为原函数 $f(x)$ 在结点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 处的 n 次插值多项式.

n 次插值多项式 $\varphi_n(x)$ 的几何意义，就是通过曲线 $u = f(x)$ 上的 $n+1$ 个点 $(x_i, u_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$, 作一条 n 次代数曲线 $u = \varphi_n(x)$. 此曲线通过 $u_i = f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 离散点，在其他点处为 $f(x)$ 的近似，如图 1.1 所示.

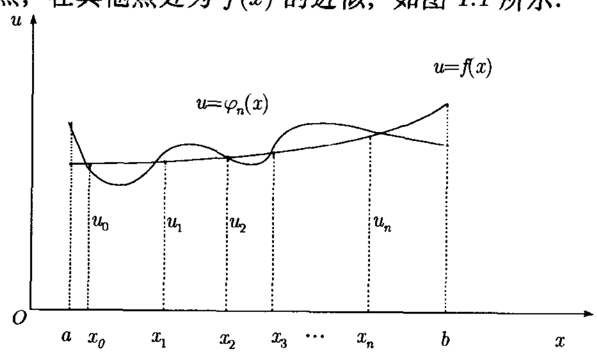


图 1.1　插值的几何意义

由插值条件 (1.3) 可知，插值多项式 $\varphi_n(x)$ 的系数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 满足线性代数方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=u_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=u_1 \\ \qquad\vdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=u_n \end{cases} \tag{1.4}$$

由线性代数知，其系数行列式 (记为 V) 是 $n+1$ 阶范德蒙德行列式，且

$$V=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j) \tag{1.5}$$

因为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是区间 $[a,b]$ 上不同的点，上式右端乘积中的每一个因子 $x_i-x_j\neq 0$，于是 $V\neq 0$，方程组 (1.4) 的解存在且唯一．故有如下定理．

定理 1.1 若结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 互不重叠，则满足条件 (1.3) 的 n 次插值多项式 (1.2) 存在且唯一．

1.2.2 拉格朗日插值多项式

拉格朗日插值多项式是常用的多项式，也容易引出基函数概念，现作简要介绍．

1) *插值基函数*

在求满足插值条件 (1.3) 的 n 次插值多项式 $\varphi_n(x)$ 之前，先考虑一个简单的插值问题：对结点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 中任一点 $x_k(0\leqslant k\leqslant n)$，作一个 n 次多项式 $M_k(x)$，使它在该点上取值为 1，而在其余点 $x_i(i=0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$ 上取值为零，即

$$M_k(x_i)=\begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \tag{1.6}$$

条件 (1.6) 表明 n 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n$ 都是 n 次多项式 $M_k(x)$ 的零值变量点，现设计

$$M_k(x)=A_K\prod_{i=0,j\neq k}^{n}(x-x_i),\qquad k=0,1,\cdots,n \tag{1.7}$$

其中 A_k 为待定系数. 有条件 $M_k(x_k)=1$, 立即可得待定系数 A_k,

$$A_k=\frac{1}{\prod\limits_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)},\qquad k=0,1,\cdots,n \tag{1.8}$$

故

$$M_k(x)=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x-x_i)\Big/\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i),\qquad k=0,1,\cdots,n \tag{1.9}$$

对应于每一结点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$, 都能写出一个满足插值条件 (1.6) 的 n 次插值多项式 (1.9) . 这样, 由 (1.9) 式可以写出 $n+1$ 个 n 次插值多项式 $M_0(x),M_1(x),\cdots,M_n(x)$. 从式 (1.9) 可见, 这组多项式仅与结点的取法有关, 称它们为在 $n+1$ 个结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次基本插值多项式或 n 次插值基函数.

2) 拉格朗日插值多项式

利用插值基函数可以立即写出满足插值条件 (1.3) 的 n 次插值多项式

$$u_0M_0(x)+u_1M_1(x)+\cdots+u_nM_n(x) \tag{1.10}$$

事实上, 由于每个插值基函数 $M_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 都是 n 次多项式, 故其线性组合 (1.10) 是不高于 n 次的多项式. 同时, 根据条件 (1.6) 容易验证多项式 (1.10) 在结点 x_i 处的值为 $u_i(i=0,1,\cdots,n)$. 因此, 它就是待求的 n 次插值多项式 $\varphi_n(x)$.

形如 (1.10) 的插值多项式称为拉格朗日插值多项式, 我们把它记成 $L_n(x)$, 即

$$\begin{aligned}L_n(x)&=u_0M_0(x)+u_1M_1(x)+\cdots+u_nM_n(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left[u_k\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x-x_i)\Big/\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)\right]\end{aligned} \tag{1.11}$$

作为常用的特例, 令 $n=1$, 由 (1.11) 即得两点插值公式

$$L_1(x)=u_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+u_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \tag{1.12}$$

这是一个线性函数. 用线性函数 $L_1(x)$ 近似代替函数 $f(x)$, 在几何上就是通过曲线上 $u=f(x)$ 的两点 (x_0,u_0) 和 (x_1,u_1), 作一条直线 $y=L_1(x)$ 近似代替曲线 $u=f(x)$(图 1.2), 故两点插值又名线性插值.

若令 $n=1$, 由 (1.11) 又可得到常用的三点插值公式

$$L_2(x)=u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+u_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \tag{1.13}$$

这是一个二次函数. 用二次函数 $L_2(x)$ 近似代替函数 $f(x)$, 在几何上就是通过曲线 $u=f(x)$ 上的三点 (x_0,u_0),(x_1,u_1) 和 (x_2,u_2), 作一个抛物线 $u=L_2(x)$ 近似代替曲线 $u=f(x)$(图 1.3), 故三点插值又称二次插值或抛物插值.

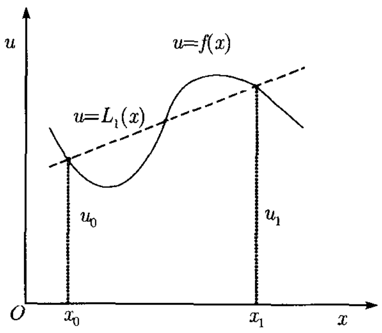


图 1.2 线性插值

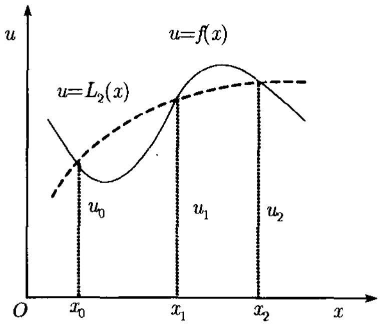


图 1.3 抛物插值

插值法是一种古老而实用的数值方法, 它不仅是数值微分、数值积分、函数逼近以及微分方程数值解等数值分析的基础, 而且在许多实际问题中广为应用.

1.3 拟合法简介

在科学实验和生产实践中, 经常要从一组实验数据 $(x_i,y_i)(i=1,2\cdots,n)$ 出发, 寻求函数 $f(x)$ 的一个近似表达式 $y=\varphi(x)$(称为经验公式). 从几何上看, 就是希望根据给定的 n 个点 (x_i,y_i), 求曲线 $y=f(x)$ 的一条近似曲线 $y=\varphi(x)$. 因此, 这是一个曲线拟合的问题.

1.3.1 拟合准则

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在且连续, 并在 n 个不同的点 $a\leqslant x_1, x_2,\cdots,x_n\leqslant b$ 上的取值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$.

拟合法的原则就是要在函数类 Φ 中, 求简单函数 $\varphi(x)$, 并不要求 $\varphi(x_i)=y_i(i=1,\cdots,n)$, 而只要求使

$$\varphi(x_i)=\varphi_i, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.14}$$

在 $x\neq x_i$ 的其他点上, 能实现 $f(x)$ 的近似表达. 通常称 $[a,b]$ 为拟合区间, 称点 $x_1,\cdots,x_n$ 为拟合结点, 称式 (1.14) 为拟合条件, 称函数类 Φ 为拟合函数类, 称 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的满足在 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 处拟合条件的拟合函数. 拟合函数类的选取和拟合逼近原则的选取十分重要. 函数 $y=\varphi(x)$ 必须能反映数

据的基本变化规律，由于不同的函数会反映出不同的近似程度，因而常常规定在某种确定的函数类中，寻求一个确定的函数 $\varphi(x)$，使它拟合已知点的数据能符合某一种逼近拟合规则，并实现最佳逼近. 逼近拟合的规则很多，常见的有

(1) 选取 $\varphi(x)$，使偏差绝对值之和最小，即

$$\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| = \sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i) - y_i| = \min \tag{1.15}$$

(2) 选取 $\varphi(x)$，使偏差最大绝对值最小，即

$$\max_{0\leqslant i\leqslant m}|\delta_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\varphi(x_i) - y_i| = \min \tag{1.16}$$

(3) 选取 $\varphi(x)$，使偏差平方和最小，即

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i) - y_i]^2 = \min \tag{1.17}$$

1.3.2　最小二乘法

通常，由于从实验观察得到的数据较多，而且观察所得的数据本身就带有误差，因此只要求函数 $y=\varphi(x)$ 能反映数据的基本变化规律. 由于不同函数反映不同的近似程度，因而常常规定在某种确定的函数类中，寻求一个确定的函数 $\varphi(x)$，使它拟合已给的数据能逼近得最佳，通常就取 (1.17) 的模型

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2 = \min$$

作为最佳逼近的依据，称这种方法为数据拟合的最小二乘法，这也是离散情况下的一种最佳平方逼近.

设由观察得到的数据为 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，要求在函数类 $M=\mathrm{span}(\varphi_1, \varphi_2,\cdots,\varphi_n)$ 中寻找

$$\sum_{j=1}^{m}a_j^*\varphi_j = \varphi^*(x) \tag{1.18}$$

使

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi^*(x_i)]^2 = \min \tag{1.19}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \sum_{j=1}^{m}a_j^*\varphi_j(x_i)\right]^2 = \min \tag{1.20}$$

实际上，式 (1.19) 是一个 $a_1^*, a_2^*, \cdots, a_m^*$ 的多元极值问题. 根据多元函数极值理论，应有

$$\frac{\partial}{\partial a_k^*}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\sum_{j=1}^{m}a_j^*\varphi_j(x_i)\right]^2\right\}=0,\qquad k=1,2,\cdots,m \tag{1.21}$$

从方程组 (1.21) 求出 $a_k^*(k=1,2,\cdots,m)$, 代入式 (1.18), 便可求得最小二乘意义下的逼近函数 $\varphi^*(x)$. 做出曲线 $y=\varphi^*(x)$, 就是观察到的数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的最小二乘拟合曲线. 通常，称式 (1.21) 为法方程组.

例 1.1 设由实验测得的数据如下：

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	4	2	3	0	-1	-2	-5

试求一条二次曲线，对它们进行最小二乘拟合.

解 设所求二次曲线为

$$y=a_1+a_2x+a_3x^2 \tag{1.22}$$

实际上取 $M=\mathrm{span}(1,x,x^2)$.

将上述数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,7)$ 代入式 (1.21), 可得法方程组为

$$\begin{cases}7a_1+0\cdot a_2+28a_3=1\\0\cdot a_1+28a_2+0\cdot a_3=-39\\28a_1+0\cdot a_2+19a_3=-7\end{cases} \tag{1.23}$$

解得

$$a_1=\frac{56}{84},\quad a_2=-\frac{39}{28},\quad a_3=-\frac{11}{84}$$

于是求得拟合曲线

$$y(x)=\frac{1}{84}(56-117x-11x^2) \tag{1.24}$$

其拟合的情形见图 1.4.

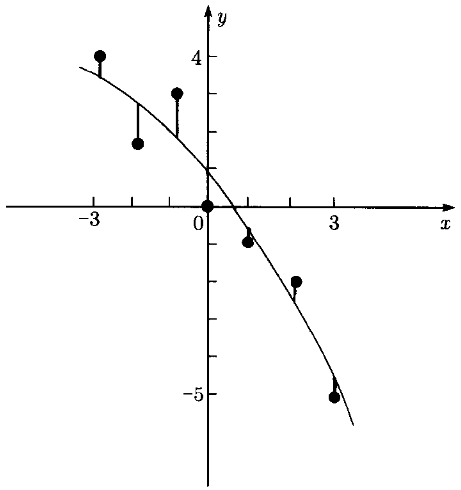


图 1.4　拟合曲线

在实际应用中，有时为了调整观察数据的作用或修正偏差，常在最小二乘的模型式 (1.19) 中加入权因子 ω_i，即

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left[y_i-\varphi(x_i)\right]^2=\min,\qquad \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1,\omega_i\geqslant 0 \tag{1.25}$$

此时，便称为带权最小二乘拟合，其方法与求解过程还是一样的.

1.4　思考与求索

插值法和拟合法都是常用的数值逼近方法. 插值法是通过已知数据点 $(x_i,u_i)(i=0,1,\cdots,n)$ 所作的函数近似表达式，因为逼近函数严格通过已知的数据点，所以从表面上看逼近函数是严格满足已知条件的. 但是实际上，已知的数据通常带有各种误差，如观测数据带有观测误差，如果要求逼近函数严格地通过所给的每一个数据点 (x_i,u_i)，就会保留原有的测试误差，当个别数据的误差较大时，逼近效果就会不理想. 为了提高插值函数对非已知点的逼近精度，当实际问题为高次非线性问题时，在插值时适当地提高插值多项式的次数，有可能改善计算结果的准确程度. 但是决不可由此得出结论，认为插值多项式的次数越高越好. 因为在采用高次插值时，有时会出现龙格现象，参见例 1.2，如果实验数据过多，在整个域上用插值法去逼近就很难实施.

例 1.2　将函数

$$u(x)=\frac{1}{1+25x^2},\qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$