集合论导引

李佛奇　叶景梅编著

宁夏人民出版社

集合论导引

李佛奇　叶景梅 编著

宁夏人民出版社

内容提要

本书由浅入深地介绍了集合论的基本知识，讨论了单纯集和非单纯集，解决了势的三歧性问题，并且介绍了非单纯集的某些具体类型，为读者学习近世代数、泛函分析和拓扑学作了集合论知识的准备．本书可供高中学生和大中学数学教师阅读和参考．

集合论导引

李佛奇　叶景梅编著

*

宁夏人民出版社出版

（银川市解放西街161号）

宁夏新华书店发行

宁夏新华印刷一厂印刷

开本787×1092 1/32　印张 6.75　字数 140千

1981年1月第1版　1982年5月第2次印刷

印数 3,501—5,400册

书号 7157·386　　定价 0.71元

前　　言

集合论是研究集合的一般性质的数学分支，至于集合所含的元素的个体特性，则不属于集合论的讨论范围.

集合的概念及理论是德国数学家康托 (G. Cantor) 在研究三角级数收敛性问题时首先加以讨论的. 由于具体的数学问题的研究，导致非常抽象与普遍的理论的建立，这些理论不仅与产生它们的那些具体问题有联系，而且对于另外一系列问题有着广泛的应用和启示，这种现象是近代数学产生、发展的一个重要特点. 集合论也是如此. 自康托在 1895 年发表其研究成果后，至今不过八十余年，但集合论的概念与方法已经渗透到所有的数学分支，并且改变了它们的面貌. 现在泛函分析、微分方程、概率统计、函数论、代数学、几何学、拓扑学等分支中的许多概念与基本理论，都必须借助于集合论的知识. 因此，不熟悉集合论的原理，就不可能对近代数学获得正确的理解.

集合论的某些最基本的概念与运算，现已列入中学数学教学大纲. 这是实现中学数学教材现代化的重要步骤. 中学生掌握集合论的初步知识，不仅为他们进一步学习数学知识打下较好的基础，而且能使他们站在较高的立足点上，观察和认识初等数学各种对象的本质及彼此间的联系，加深对数学概念的理解. 要做到这一点，无疑就应要求广大中学数学教师掌握较多的集合论知识. 但是，我们看到的有关集合论的著

述，一般都是以掌握了较多的高等数学知识的读者为对象的，因而对于概念、理论的阐述很少联系中学数学课的教学内容，使广大读者望而生畏．鉴于这种情况，我们尽力根据中学数学教学的需要和多数教师的实际状况编写本书，以期作为中学数学教师和大学数学系学生学习集合论的过渡读物，为中学进行集合论基本知识的教学提供参考．因此，文字叙述力求通俗易懂，内容安排注意由浅入深，但又不囿于中学数学教学大纲规定的范围．考虑到读者的不同的知识水平，本书内容分为三个部分：

第一章介绍集合论的最初步的知识，是中学数学教师必须掌握的．在本章中，我们尽量联系中学数学课讲授的知识，使得有自学能力的中学生也能够读懂．

第二章进一步介绍集合论的基本知识．它们虽然超出了中学数学教学大纲的要求，但对于高中数学教师却是必不可少的．

第三章介绍赋予了结构的集合的知识，初学者可以暂时不读．其中，§1仍然属于集合论的范畴，它不仅完全解决了势的三歧性问题，而且与其它数学分支也有着密切的联系；§2、§3、§4从集合论的观点出发，分别介绍了近世代数、泛函分析与拓扑学的常识，掌握这些知识，对于我们认识初等数学、解析几何、高等代数、数学分析等课程的实质，是大有裨益的．

集合论的高度抽象性会给初学者带来一定的困难．为了帮助读者克服学习困难，我们除举例说明以外，在各节之后都附有一定数量的习题，它们可以帮助读者理解正文，巩固和深化对于概念的认识．同时，希望读者在学习过程中，随时用自己所熟悉的算术、代数、几何、高等数学等方面的实例，印证所

学的集合论知识.

由于我们水平有限，难免挂一漏万，东鳞西爪. 请读者发现谬误之处，不吝赐教，以便我们进一步修改.

本书的插图，是宁大数学系田为恕同志绘制的；另外，不少同志对本书的编写给予了很大的帮助，在此一并致谢.

编　者　1978年12月

目　录

第一章　集合的初步知识

本章介绍集合论的最起码的常识，它们都是学习集合论所必须熟悉的．其中包括：

基本概念．如集合、元素与关系“属于”，并集、交集、差集与补集，映照与逆映照等．

基本运算．如并、交运算，包含关系，映照的复合等．

基本性质．如交换律、结合律、分配律、吸收律、摩尔根公式等．

本章所有内容都局限于“单纯集”的范围．换言之，对于集合，我们将不赋予任何象元素的顺序、元素的和与积、元素间的距离之类的结构．

阅读本章内容，应时时注意联系初等数学、高等数学的有关知识，进行对比，找出类似之处与不同之处，研究集合论是怎样推广和抽象了初等数学、高等数学的知识的．

本章中凡标有 * 号的内容，一般中学学生可暂时不读．

§1．集合的概念

1．集合概念的解说与记号

近代数学的基础往往是建立在集合的概念上的．什么是集合呢？用集合论的创建者康托的话，就是“把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象，也

可以是思维的对象——放在一起，称为集合."简单地说，集合(或集)就是可以互相区别的事物的汇集. 构成该集合的事物称为集合的元素(或称元). 例如:

所有自然数组成一个集合，每一个自然数都是它的元素.

$10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ 的所有质因数组成一个集合，它有四个元素，就是质数 2, 3, 5, 7.

函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ (在实数范围内)的定义域，即区间 $[-2,2]$，是一个集合，每一个满足不等式 $-2\leqslant x\leqslant2$ 的实数 x 都是它的元素.

在实数范围内定义的所有指数函数组成一个函数的集合，每一个由具体的实数 $a(a>0, a\neq1)$ 而得到的函数 $y=a^x$，都是这个集合的一个元素.

平面上一切半径为 1 的圆周组成一个集合，每一个这种圆周都是它的一个元素.

在集合论中，当我们不涉及具体的对象时，一般用小写英文字母 $a, b, c, \cdots$ 表示元素，用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合. 当 a 是集合 A 的一个元素时，我们称 a *属于* A，记为 $a\in A$. 否则称 a *不属于* A，记为 $a\overline{\in}A$. 显然，任何一个具体元素 a 对一个具体的集合 A 而言，"属于"或"不属于"，二者必居其一. 注意，一个集合的自身不能作为它的元素，即 $A\overline{\in}A$，否则将导致逻辑上的矛盾. 在集合论中，元素、集合及属于这三个概念，是最原始的概念，其它一切概念都是由此引申出来的.

应当指出，由于上述三个概念是最原始的概念，就象算术中什么叫 1，几何中什么叫点一样，不可能也没有必要再去下"严格的定义". 我们将仅仅以上述对它们的解说为满足.

当集合 A 是由元素 $a, b, c, \cdots$ 构成时，我们可写成

$$A=\{a, b, c, \cdots\}.$$

例如，全体自然数的集合 N 写成

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\}.$$

又如 $10!$ 的质因数的集合 P 写成

$$P=\{2, 3, 5, 7\}.$$

只有一个元素 a 的集合，称为*单元素集*，可用 $\{a\}$ 表示. 应当注意，$\{a\}$ 与 a 是完全不同的(这在下一节讲述集合的运算时就可明白).

然而前面所述的其余三例的集合，则不能用上述记号表示. 为此，我们介绍另一种重要的记法：

设对于每个 x，$\pi(x)$ 是关于 x 的一个命题，则记号

$$\{x; \pi(x)\}$$

表示能使命题 π 成立的一切 x 组成的集合. 这样，所余三例的集合就可以分别表示为

$$\{x; -2\leqslant x\leqslant 2\},$$

$$\{a^x;\ a\text{ 为实数}, a>0, a\neq 1\},$$

$$\{(x-a)^2+(y-b)^2=1;\ (a, b)\text{ 为坐标平面上的任意点}\}.$$

为了书写方便，本书还将使用下述逻辑记号：

“甲 & 乙”表示甲及乙；

“甲 or 乙”表示甲或乙；

“甲 $\Longrightarrow$ 乙”表示由甲成立必然导致乙成立（乙是甲的必要条件）；

“甲 $\Longleftarrow$ 乙”表示乙成立就充分表明甲也成立（乙是甲的充分条件）；

“甲 $\Longleftrightarrow$ 乙”表示甲与乙等价(乙是甲的充要条件).

2. 两集合的相互关系·子集

定义 1 如果集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全一样，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$，即

$$A=B \text{ 就是 } a\in A \Longleftrightarrow a\in B.$$

〔例 1〕 A 是方程 $x^2-1=0$ 的解的集合，B 是函数 $y=\sin x$ 的极值的集合，显然它们都是由 -1 与 1 两个数构成的集合 $\{-1, 1\}$，因此 $A=B$.

〔例 2〕 A 是使函数 $y=\sin x$ 达到极值的所有 x 的集合，B 是使 $y=\operatorname{tg} x$ 无意义的 x 的集合，显然它们都是由 $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ (n 为任意整数)构成的集合

$$\left\{\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}.$$

因此 $A=B$.

定义 2 对于两个集合 A 与 B，若 A 的所有元素都属于 B，即

$$a\in A \Longrightarrow a\in B,$$

则称 A 是 B 的一个子集(A 是 B 的部分或部分集)。这时可用包含记号

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

来表示，读成"A 包含于 B (或 B 包含 A)"。若 A 是 B 的子集，而且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的一个真子集(或原有的子集)，记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

〔例 3〕 若 A 是 60 的全体质因数的集合 $\{2, 3, 5\}$，B 是 60 的全体因数 (指正因数) 的集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15,$

20, 30, 60}，显然，A是B的一个真子集，即$A\subset B$.

〔例 4〕 若 $A=\{x; 2x-1>0\}$，$B=\{x; 2x^2-3x+1<0\}$，则A是区间$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$，$B$是区间$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 显然 $B\subset A$.

定义 3 不含任何元素的集合，称为空集(零集)，记为 $\varnothing$ (或 0).

例如，方程 $x^2+1=0$ 的所有实数解的集合是空集.

注意，$A=\varnothing$ 的意义是集合A没有元素，是空的，"消失了". 空集与以数 0 为元素的集合{0}是完全不同的. {0}不是空集，而是有一个元素"0"的集合. $A=\varnothing$ 与 $a=0$ 也完全不同，$a=0$ 只表示元素 a 就是数 0，并未表明 a 单独形成一个集合.

引进空集的概念是必要的，否则势必只要一讲到集合，就得附加如下声明："如果此集合存在". 实际上，因为单凭一集合的元素的定义，往往还完全不知道这样的元素是否存在. 例如，到现在为止，我们还不能判断有无自然数 n，使方程

$$x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$$

有自然数解，即著名的费尔马(Fermat)猜测是否正确①.

我们规定空集包含于任何集合. 显然，对任何集合 A，非真子集只有两个：A与$\varnothing$. 其它一切子集都是A的真子集. 这时 $\varnothing\subset A$ 就表明A非空.

〔例 5〕 写出{1, 2, 3}的全体子集.

解 显然{1, 2, 3}的所有子集是:

---

① 费尔马曾推测：当 $n\geqslant 3$(n 为自然数时)，方程 $x^n+y^n=z^n$ 无自然数解. 此命题是否正确，至今仍属疑案.

较新的成果是当 $2<n<100,000$ 时，上述推测是正确的.

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\},$$
$$\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\},$$
共有 $2^3=8$ 个子集.

〔例 6〕 由 n 个元素组成的集合有多少个子集?

解 n 个元素的集合，从中任意取定 m 个就可构成一个子集. 这种含有 m 个元素的子集共有 C_n^m 个. 当 m 分别是 0 (一个元素也不取，得空集), $1, 2, \cdots, n$ 时，就分别得到 C_n^0, $C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n$ 个子集. 由二项式定理可知子集的总数是

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = (1+1)^n = 2^n.$$

上述二例足以说明规定 $\varnothing$ 及 A 是 A 的子集的便利之处.

关于包含关系，有下述定理:

定理 1 $A=B \Longleftrightarrow A\subseteq B$ & $B\subseteq A$.

定理 2 (推移律) $A\subset B$ & $B\subset C \Longrightarrow A\subset C$.

前一定理是明显的，现在证明后一定理.

证明 设 $a\in A$, 则由 $A\subset B$ 知 $a\in B$. 既然 $a\in B$, 由 $B\subset C$ 又知 $a\in C$. 这就表明 A 的任何元素都是 C 的元素，即 $A\subseteq C$.

又由 $B\subset C$ 知至少存在一个元素 $c\in C$, 使得 $c\overline{\in} B$, 显然 $c\overline{\in} A$, 故 $A\neq C$.

归纳上述两方面，即有 $A\subset C$. 定理证毕.

〔例 7〕 用 N 表示全体自然数的集合，I 表示全体整数的集合，R_0 表示全体有理数的集合，R 表示全体实数的集合，C 表示全体复数的集合. 显然前面的集合都是后面的集合的真子集:

$$N\subset I\subset R_0\subset R\subset C.$$

3. 集合系

集合的元素可以是任何事物，因此若把一个集合看成是一个元素，由这种元素组成的集合，称为集合系(或集合类，简称系或类)．集合系一般用德文花体字母 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots$ 等表示（见附录二）．

关于集合系，可以沿用前面的记号：$A \in \mathfrak{A}$ 表示集合 A 属于系 $\mathfrak{A}$；$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ 表示 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的子集，即 $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \in \mathfrak{B}$，等等．

例如，若以 M_n 表示区间 $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \cdots)$，其中 a_n, b_n 是实数，把 M_n 看成一个元素，则

$$\{M_1, M_2, M_3, \cdots\} = \mathfrak{M}$$

是一个集合系．

又如，设 X 是某集合，若把 X 的每一个子集看成是一个元素，则子集的全体组成了一个 X 的子集的系，这种集合系记为

$$\mathfrak{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}.$$

在前面的例 5 中，$A = \{1, 2, 3\}$，则

$\mathfrak{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$，

它是由 8 个元素组成的集合．

注意，子系与 X 的子集的系是不同的概念．

习 题 一

1. 以 $\{a, b, \cdots, c\}$ 的形式写出下列各类数组成的集合：

(1) 小于 10 的自然数；

(2) 平方后不大于 100 的负整数；

(3) 小于 50 的质数；

(4) 绝对值小于 23 的奇数；

(5) 128 的质因数；128 的因数；

(6) 20! 的质因数；

(7) 60 与 80 的公约数；

(8) 由 0, 1, 2 三个数字构成的最多到三位的非负整数(允许重复取同一数)；

(9) 小于 100 的双生质数的小者(若 p 与 $p+2$ 同时为质数，则称 p 与 $p+2$ 是双生的. 例如 5 与 7, 11 与 13 等)；

(10) 使方程 $x^2-10x+n=0$ 有非负整数解的 n.

2. 以$\{a, b, \cdots, c\}$的形式写出下列各方程或不等式的实数解集或整数解集:

(1) $x^2-x-1=0$;

(2) $x^2+2x-2(1+\sqrt{2})=0$;

(3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=12$;

(4) $3x^3-14x^2+20x-8=0$;

(5) $2x^4+7x^3-x^2-7x+2=0$;

(6) $2x-15<0$ 的非负整数解；

(7) $x^2<10x-16$ 的整数解；

(8) $|9x-4|\leqslant 50$ 的整数解；

(9) $|x-2|+|x+3|<7$ 的整数解.

3. 以$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$或$\{\cdots a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$的形式，写出下列各集合(要求也列入 a_n):

(1) 正的偶数；

(2) 被 3 除后，余数为 1 的自然数；

(3) 方程 $2\sin x+1=0$ 的解；

(4) 使 $\operatorname{ctg} x$ 无意义的 x.

4. 用区间表示下列各集合:

(1) $\{x; |x-2|<3\}$;

(2) $\{x; 3x^2+5x-22<0\}$;