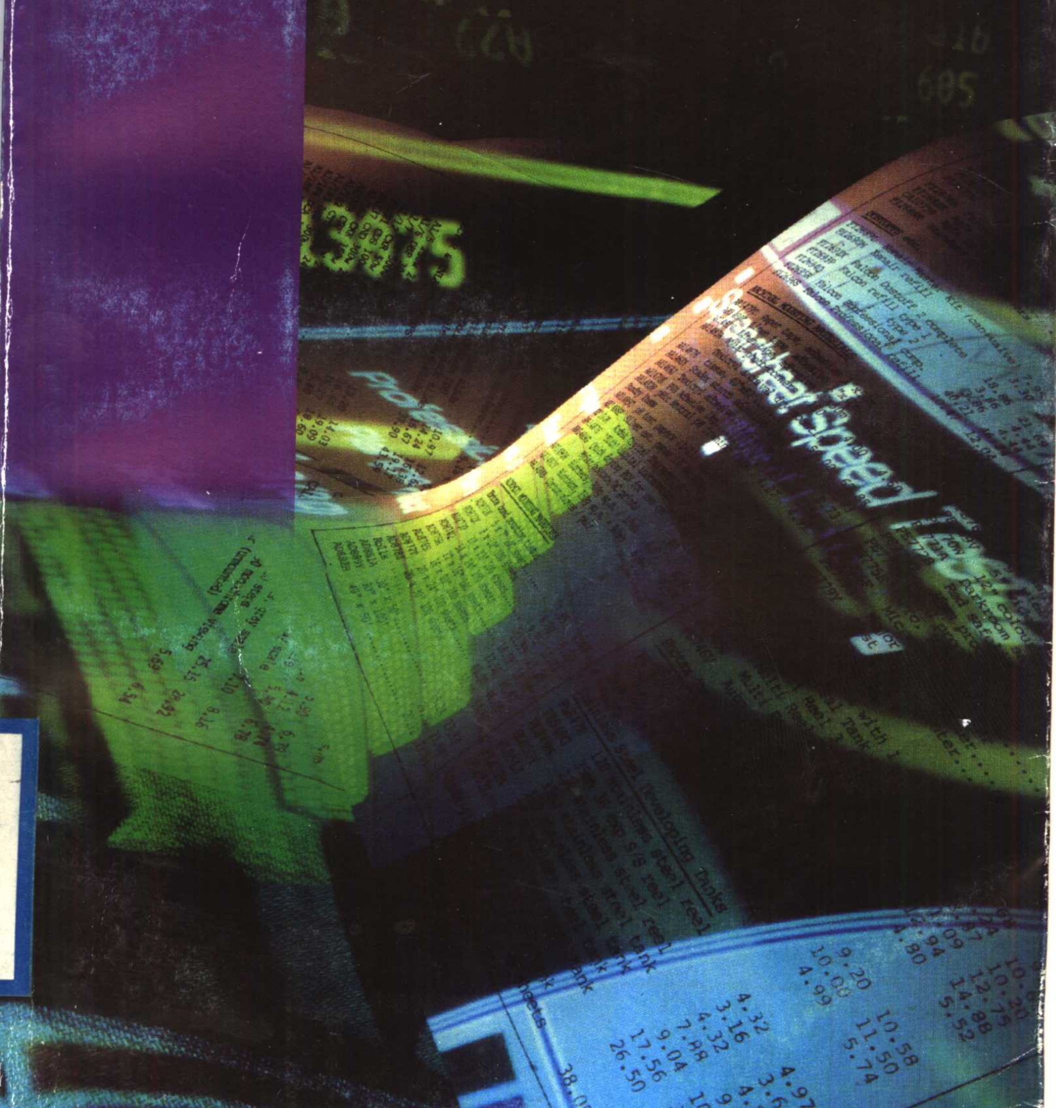
新世纪百科知识金典

XINSHIJI BAIKE ZHISHI JINDIAN

走进数学王国 2

潘庆平等 编著

重庆出版社

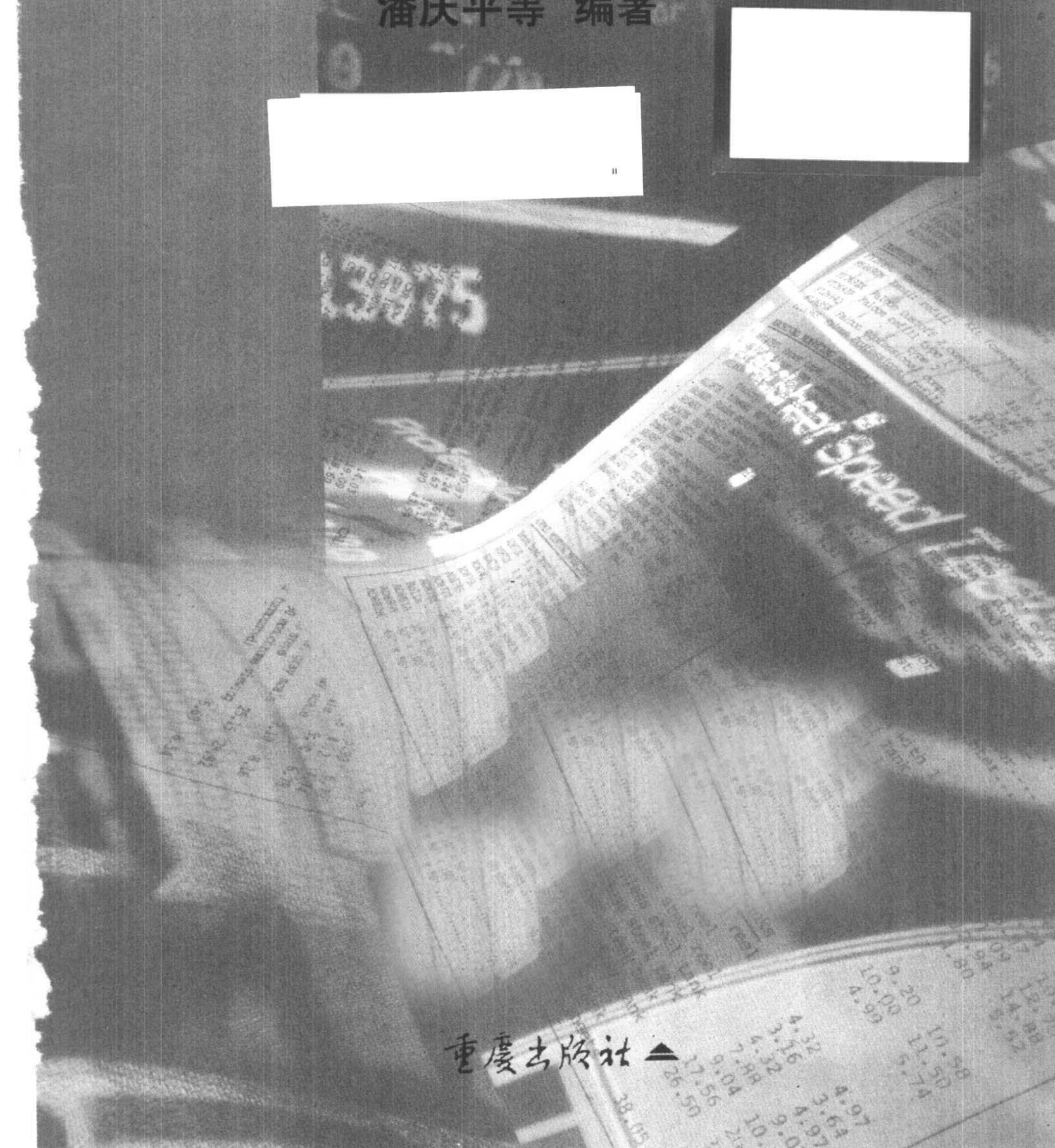


新世纪百科知识金典

XINSHIJI BAIKE ZHISHI JINDIAN

走进数学王国 2

潘庆平等 编著



重庆出版社

责任编辑　黄友六
封面设计　金乔楠
技术设计　刘黎东

新世纪百科知识金典
走进数学王国 2
潘庆平　等编著

重庆出版社出版、发行　（重庆长江二路205号）
新　华　书　店　经　销　重庆新华印刷厂印刷
*
开本 850×1168　1/32　印张 5.875　插页 4　字数 149 千
1999 年 4 月第一版　　1999 年 4 月第一版第一次印刷
印数：1—5,000
*
ISBN7－5366－4167－2/O·21
定价：9.00 元

新世纪百科知识金典

撰稿：

潘庆平　余永清　周邦祥　孙维伍
王文龙　金克勤　邢云鹏

目录

四、几何类

黄金分割

如图4-1,已知线段 AB,用尺规在 AB 上求作一分割点 C,使 $AC:CB=AB:AC$.

图4-1

这是尺规作图的一道历史名题,是古希腊数学家提出的.最先解决这个问题的是公元前4世纪的希腊数学家欧多克斯(Eudoxus,前408~前355).欧多克斯的作图方法,被后来的欧几里得编入《几何原本》,所以有人误认为欧几里得是最先解决这个问题的人.

[题解] 欧多克斯的作图方法是:以 AB 为边作正方形 $ABDE$,取 AE 的中点 F,连结 FB,延长 EA 到 G,使 $FG=FB$,以 A 为圆心,AG 长为半径画弧,交 AB 于 C,点 C 即为所求之分割点.

欧多克斯还给出了 C 点为什么是满足条件的分割点的证明,欧几里得也把它收集到《几何原本》里去了.欧多克斯的证明如下:

如图4-2,以 AC 为边作正方形 $ACHG$,延长 HC 与 ED 相交于 K,则 $S_{ACHG}=AC^2=S_{BDKC}=CB\cdot BD$,即

$AC^2 = CB \cdot AB$，即 $AC : CB = AB : AC$.

这个结果也可用这样的方法推导：

设 $AB = a$，

$$\because FB^2 = AB^2 + AF^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\therefore FB = \frac{\sqrt{5}}{2} a.$$

$$\therefore AG = \frac{\sqrt{5}}{2} a - \frac{1}{2} a,$$

$$AG^2 = AC^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 a^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) a^2.$$

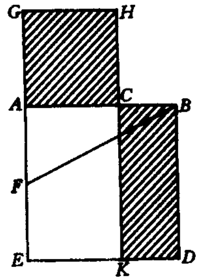


图 4-2

又

$$CB = AB - AC = a - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) a = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) a.$$

$$\therefore CB \cdot BD = CB \cdot AB = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) a^2.$$

$\therefore AC^2 = CB \cdot AB$，即 $AC : CB = AB : AC$.

［赏析］ C 点使线段 AB 分割后，形成 $AC : CB = AB : AC$ 的线段之比，习称这一分割为“黄金分割”，数学上称“点 C 分线段 AB 成中外比”．假设线段 AB 长为 a，点 C 分线段 AB 成中外比后，AC 的长必为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} a \approx 0.618a$．现代优选法中的“0.618 法”就是利用了这个中外比的性质．称中外比为“黄金分割”，最早是文艺复兴时期最杰出的大画家达·芬奇（L. da Vinci，1452 ~

1519).达·芬奇认为,数学特别是其中的几何学与绘画有着密切的关系.他十分注意对透视法和线段比例关系的研究,是他最早把黄金分割的几何性质运用到他的绘画法则中去,他的许多作品都非常充分地体现了这一点.人所能感受到的美的东西,其形态多有黄金分割的呈现:琴弦的“千金”安放在黄金分割点上,琴声才会悦耳;树的杈点处在黄金分割点上,这树才给人以壮实茂盛的感觉;不少四肢动物的前肢也近似地处于全身的黄金分割点上,使人感到它匀称而坚定;鲜花的花瓣呈五角形的特别多,因为正五边形的对角线两两交叉后,都成黄金分割;建筑设计师要设计出美观、大方的窗框,必须尽力选择长宽符合黄金分割的矩形;书写中国的方块字,若字的基本框架是黄金分割矩形,一定会给人舒服、稳健的美感.因此,几何学中的黄金分割不仅能显示美,还能被运用来创造美.

勾股定理

勾股定理是一个很古老的定理,像埃及、巴比伦、中国、希腊、印度很早就知道它了.国外称之为毕达哥拉斯定理,他们把这个定理的最早发现,归功于古希腊的毕达哥拉斯学派.其实,先于毕达哥拉斯五六百年的我国商代,就有个叫商高的学者提出“勾三股四弦五”的论断,我国的古代数学家就已经掌握了直角三角形三边间长的等量关系.

勾股定理的内容是:“在直角三角形中,斜边(弦)的平方等于两直角边(长者叫股,短者叫勾)的平方之和.”用数学语言来表达,可为:“在直角$\triangle ABC$中,AB为斜边,AC、BC为直角边,则$AB^2=BC^2+AC^2$.

[题解] 证明勾股定理的方法很多.在所有的几何定理中,勾股定理的证明也许是“一题多解”的冠军.有人作过统计,说有

500余种.现存的最古老的证明,载于欧几里得的《几何原本》一书中,他的证明步骤如下:在直角三角形 ABC 各边上向外作正方形,如图 4-3.连结 CD、AH.在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle DBC$ 中,$HB=BC$,$BA=BD$,$\angle HBA=\angle DBC$.

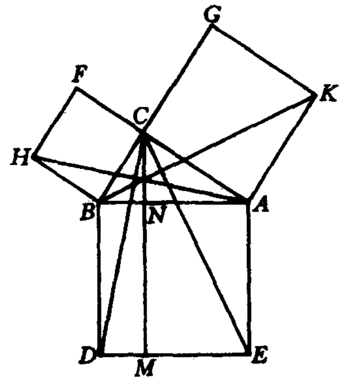


图 4-3

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle DBC$.

作 $CM \parallel BD$,交 AB 于 N,

$\because \triangle ABH$ 的边 BH 上的高等于 CB,

$$\therefore S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}BC\cdot BH$$
$$=\frac{1}{2}S_{BHFC}.$$

又 $S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}BN\cdot BD=\frac{1}{2}S_{BDMN}$,

$\therefore S_{BHFC}=S_{BDMN}$.

同理可证正方形 $AKGC$ 的面积与矩形 $ANME$ 的面积相等,即 $S_{AKGC}=S_{ANME}$.

$$\text{而 } S_{ABDE}=S_{BDMN}+S_{ANME}$$
$$=S_{BHFC}+S_{AKGC},$$

$\therefore AB^2=BC^2+AC^2$.

欧几里得的这个证明,层次分明,思路清晰,明白易懂,被广为流传,以至如今的教科书,都采用这个证明.其实,欧几里得的证明方法从“简洁”上讲,还远不如公元3世纪我国数学家赵爽给出的证明法.赵爽在一篇500来字的论文中,画了六张“勾股圆方图”,其中有一张称为弦图,如图4-4,它的主要部分是正方形 $ABCD$,由图可知,正方形 $ABCD$ 由四个相等的直角三角形和

一个小正方形组成.设直角三角形三条边如图所示分别为 a、b、c,则正方形 $ABCD$ 的面积为 c^2.

$$c^2 = 4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2$$
$$= a^2+b^2.$$

这就得:直角三角形斜边的平方,等于两直角边平方之和.

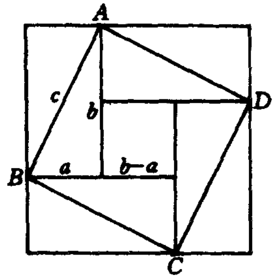


图 4-4

[**赏析**] 勾股定理是数学大厦的一根支柱,没有勾股定理就没有现代数学,勾股定理的发现与应用,是人类智慧的结晶.相传,毕达哥拉斯他们完成了勾股定理的证明之后,曾宰了 100 头牛来庆贺.现在,科学家选定勾股定理作为"宇宙语言"来与外星人对话.他们认为,如果存在着有智慧的外星人,外星人不懂得地球人的语言和文字,但他们一定懂得勾股定理.于是,国外一些研究太空人的机构,制造了许多画有如图 4-5 所示的勾股定理图,放入太空作为和"外星人"联络的信号,一旦碰上外星人,外星人就因为他们也懂得勾股定理,而和地球人接上关系.

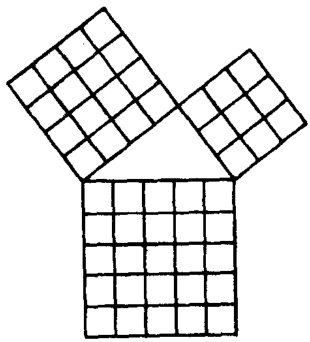


图 4-5

勾股定理在理论上和应用上的地位当然不可低估,就是对这个定理本身的研究,也最能给人以数学美的享受.我国对勾股定理的探讨是世界上最早的国家之一,在赵爽前数百年,就有许多成果了.我国古代,称直角三角形的两直角边分别为勾和股,斜边叫弦,《周髀算经》中记载了"勾广三,股修四,径隅五";还谈到从勾股求弦的一般方法是"勾股各自乘,并而开方除之".一般认为

《周髀算经》成书于公元前 1 世纪，但它记载的内容却是公元前 11 世纪的事，可见在我国至少 3100 年前就发现了勾股定理，这要比公元前 5 世纪的毕达哥拉斯早上五六百年.

牛棚送水

公元 1 世纪前后，古希腊出过一个名叫希罗(Heron)的数学家.他给后人留下了 14 部有关物理学和数学的著作，从这些著作中分析，可以推揣，希罗是个受过良好教育、学术功底十分扎实的大学者.他的研究风格是注重知识的实用性，他对实际效用比对理论上的完整性更重视，被史学家认定为“应用数学方面的著作家”.希罗的生卒不详，没有文字记载可以查证，有人估计他是公元前 200 年左右的人.

在希罗的 14 本著作中，有一本书叫《反射光学》.《反射光学》里提出了一个希罗的著名论断：光线总是沿着最短路程前进，光线经最短路径折射，其入射角与反射角一定相等.为了说明自己的结论，他提出了一个牛棚送水的数学题.题目是这样的：

彼尔先生的家和属于他家的牛棚，都在尼罗河的东侧.彼尔每天要去尼罗河提水到牛棚喂牛.请你帮彼尔先生设计设计，应在尼罗河岸的哪一点作为提水处，才使彼尔先生每天走的路程最短.

[**题解**] 把尼罗河岸视为一条直线，设彼尔先生的家为 A 点，其牛棚为 B 点，如图 4-6，过 B 点作河岸的垂线，O 为垂足，取 $OB' = OB$，连接 AB'，AB' 交河岸于 M，则 M 就是使路程最短的提水处.

事实上，在直角$\triangle MOB$ 和直角$\triangle MOB'$中，$BO = B'O$，$MO = MO$，$\therefore \triangle MOB \cong \triangle MOB'$，$\therefore MB = MB'$.

$\therefore AM + MB = AM + MB' = AB'$.

依作图知，AB' 是 A、B' 两点间的线段，联结两点的线中以线段为最短，因此 M 是所求的提水处，$AM + MB$ 是所求的最短路程.

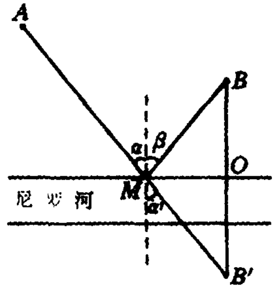


图 4-6

［赏析］ 牛棚送水这道题目的求解并不复杂，但希罗把它编入自己的著作之中，就因为此题的求解，实际上是他对反射光学提出的论断的应用. 因为过 M 作一河岸的垂线，很容易看出 $\angle\beta = \angle\alpha'$，而 $\angle\alpha' = \angle\alpha$，所以 $\angle\alpha = \angle\beta$.

从光学的角度看，$\angle\alpha$ 是入射角，$\angle\beta$ 是反射角，入射角 = 反射角，光线所走的路径最短. 这与我们的结论相一致.

光的反射规律，早在欧几里得时代就受到科学家的重视，欧几里得写了一本《镜面反射》的几何光学专著，论述了镜面反射，其中就有入射角等于反射角的规律. 希罗在欧几里得的反射律基础上，推出了最短路径的结论：如图 4-7，若 P 及 Q 是在直线 ST 同侧的任意两点，则从 P 到直线再到点 Q 的一切路径中，以通过直线上点 R 使线段 PR 及 QR 与 ST 的夹角相等的那个路径为最短. 而这恰好就是光线所要经过的路径，所以光线从 P 点出发经过镜面再到 Q 是采取最短路径的. 光线怎么懂得这个几何原理呢？大自然的奥妙真是令人折服！

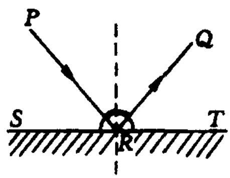


图 4-7

塑像问题

这是奥地利数学家 J. 缪勒在 15 世纪中叶提出的一个数学

问题.这个问题引起了数学界的极大兴趣,不少人费耗心机来解答它,但获得满意答案的并不多,后来,随着微积分学的建立,人们用微积分的方法把它解答了.后来,英国数学家 A.劳尔施(Lorsch)又用一种初等数学的方法解答了它,成为比微积分方法更简洁的一种解法,现在向你介绍这一解法的思路.

在15世纪的文艺复兴时期,奥地利的维也纳成了西欧文化艺术的中心.维也纳人崇尚艺术,尤其是崇尚雕塑艺术.城市雕塑业非常发达,研究雕塑审美艺术的科学也非常活跃.J.缪勒的问题就是从数学的角度来研究雕塑审美的.

缪勒提出的问题是这样的:

假定有一个塑像,高 h 英尺,立在一个高 p 英尺的底座上(图4-8).一个人注视着这个塑像朝它走去,这个人的水平视线离地 e 英尺.问这个人站在离塑像基底多远的地方才能使塑像看上去最大(即视角最大)?

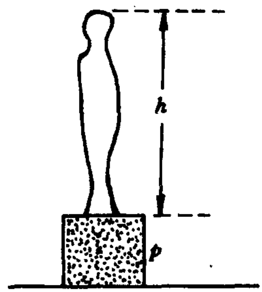


图4-8

[题解] 劳尔施解答此题的方法,分三种情形考虑:1.人的水平视线不超过底座高,即 $e<p$;2.人的水平视线超过塑像顶部,即 $e>p+h$;3.人的水平视线在底座之上且在塑像顶部之下,即 $p<e<p+h$.因为通常情况,塑像底座总是略高于人的,现就 $e<p$ 的情形,介绍其解题步骤,其余情况可类似推理.

如图4-9,设 C 是塑像的顶端,B 是塑像的底端,l 是观察者在地面上行走时的眼睛的轨迹,M 表示观察者的任意位置,α 表示视角 BMC.过 B、C 作一圆 K,使之与直线 l 相切.设切点为 M',则 M' 就是所求的使视角 α 最大的点.

因为,如图4-10,在圆 K 内的点与 B、C 构成的视角都不会