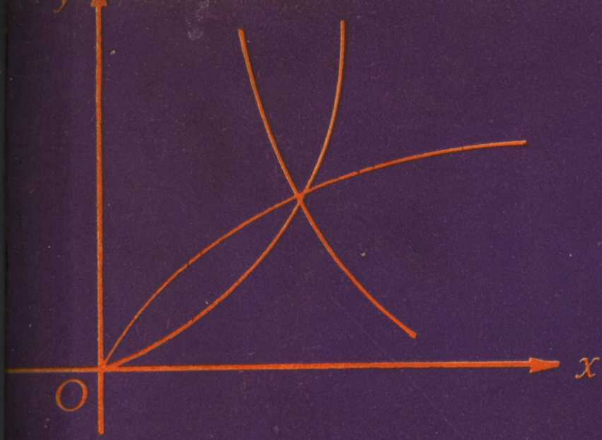

代数第一册

高中数学解难释疑

天津人民出版社

高中数学解难释疑

代数第一册

贺信谆
魏仲和　明知白　编著

天津人民出版社

高中数学解难释疑
代数第一册
贺信淳 魏仲和 明知白 编著
*
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道130号）
天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行
*
787×1092毫米　32开本　15印张　307千字
1991年4月第1版　1991年4月第1次印刷
印数：1－23,000
ISBN 7-201-00541-3/G·207
定　价：6.10元

序

这部丛书是根据《全日制中学数学教学大纲》按照《高中数学课本（甲种本）》的章节，给中学生编写的辅助读物，共分五册，与六册高中课本一一对应使用（代数课本第二、三册对该书代数第二册）；目的是使读者深入理解基本知识，加强基本技能，提高逻辑思维与空间想象能力和分析问题解决实际问题的能力，内容都按课本章次排列。每章的安排大致如下：

一、基本内容　这里将学生起码要掌握的东西，在不失内在联系的原则下，分类整理，既便于记忆，又重点突出，使读者对全章概况，一目了然。可以说这是重点复习，也是全章纲要。所谓数学难学，多半由于学习不得其法。学习方法中重要的一点是善于将知识系统化，抓住了系统，就会感到轻松。这部分内容对于不会自己整理系统的同学是很大的帮助。

这里还配备一些有代表性的例题，各用一两种方法按正确格式解答出来。题型比较齐备。学生易犯的错误，都从概念上或逻辑上加以解说，层次复杂的解法则先列举步骤。凡属关键所在，则事前分析或在解完后详细分辨，以期学生学到解题的基本技能，并附有一组习题，由读者揣摩练习。

二、解难释疑　掌握基本内容仅是一般要求。希望提高学生的知识水平，还需要将课本每章的重点与难点以及各部分的内在联系详细剖析。证题或解题还有许多不成文的规律，也要揭示给读者。本书对课本每章教材，选定若干题目撰成短文，每篇论述一两个问题。中间适当地插入一些范例，有时也将问题略加延拓。这些短文是本书的精华，是精心的辅导，不是泛泛的解说。

以上是我对于本书的观感。大家知道，辅助读物要发课本之所未发，要想学生之所未想，编写工作相当繁重。非有多年的教学实践，不能想得周到，现在这丛书有可能在各个方面给中学同学解难释疑，指出明路。我乐见青年将得到一本好的读物。

赵慈庚

一九八三、三、四、于北京师大数学系

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

基本内容

一、集　　合

（一）集合

1.集合是一个不加定义的原始概念，通常是这样描述的：把具有某种属性的对象看作一个整体，便形成一个集合．每个集合中的对象叫做该集合的元素．用大写字母A、B、C、…表示集合，用小写字母a、b、c，…表示集合中的元素．

如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记为$a\in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记为$a\notin A$（或者$a\bar{\in} A$）．

集合具有以下特征：

集合的确定性　对于任何一个对象都能确定它是不是某一集合的元素；

集合中的元素互异性　在同一集合中不能重复出现同一元素；

集合中的元素无序性　在一个集合中不考虑元素间的顺序．

一般用N来表示全体自然数所成的集合，简称自然数集.Z表示全体整数所成的集合，简称整数集.Q表示全体有理数所成的集合，简称有理数集.$\bar{Q}$表示全体无理数所成的集合，简称无理数集.R表示全体实数所成的集合，简称实数集.有时还用Z^+表示正整数集，用Q^-表示负有理数集.

2.集合的表示方法　常用的有列举法和描述法

列举法　把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法.用列举法表示集合时，不必考虑元素间的顺序. 例如小于10的质数组成的集合，可以写为$\{2, 3, 5, 7\}$，也可以写成$\{3, 7, 2, 5\}$等；

描述法　把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法. 例如大于2且不大于10的实数组成的集合，可以写为$\{x|2<x\leqslant 10\}$或{大于2且不大于10的实数}但写成{所有大于2且不大于10的实数}是不对的，应把所有二字去掉.

（二）子集、交集、并集和补集

子集、交集、并集和补集分别是从某个方面来考察集合与集合之间的关系的.

1.子集　如果集合A的元素都是集合B的元素，则集合A叫做集合B的子集。记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$. 即如果从$a\in A$推出$a\in B$. 则$A\subseteq B$. 特别地，$A\subseteq A$成立.

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$，例如$\{x|x^2+1=0, x\in R\}=\varnothing$.规定空集是任何集合的子集$\varnothing\subseteq A$.

真子集　如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，则集合A叫做集合B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset$

A. 显然，空集是任何非空集合的真子集.

显然，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$.

如果$A\subseteq B$且$A\supseteq B$，那么就说集合A与集合B相等.记作$A=B$.

2.交集：由同时属于集合A和集合B的所有元素组成的集合叫做A与B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}.$$

由定义可知，对任何集合A，B有

$$A\cap A=A，A\cap\varnothing=\varnothing，A\cap B=B\cap A.$$

3.并集：由属于集合A或者属于集合B的所有元素组成的集合叫做A与B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A 或 x\in B\}.$$

由定义可知，对任何集合A，B有

$$A\cup A=A，A\cup\varnothing=A，A\cup B=B\cup A.$$

4.补集：在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常都是某一个给定集合的子集，这个给定集合叫做全集.

已知全集I，$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x|x\in I 且 x\notin A\}.$$

由定义可知，对任何集合A有

$$A\cup\overline{A}=I，A\cap\overline{A}=\varnothing，\overline{\overline{A}}=A.$$

【例1】已知$I=\{$由0到10的整数$\}$，$A=\{$不大于10的正整数$\}$，$B=\{$小于10的质数$\}$. 求：

（1）集合B的所有真子集；

（2）$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup B$，$\overline{A\cap B}$.

解：（1）∵ $B=\{2,3,5,7\}$，

∴ B的真子集是$\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{5\}$，$\{7\}$，$\{2,3\}$，$\{2,5\}$，$\{2,7\}$，$\{3,5\}$，$\{3,7\}$，$\{5,7\}$，$\{2,3,5\}$，$\{2,3,7\}$，$\{2,5,7\}$，$\{3,5,7\}$。

（2）∵ $\overline{B}=\{0,1,4,6,8,9,10\}$，

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

∴ $A\cap\overline{B}=\{1,4,6,8,9,10\}$；

∵ $\overline{A}=\{0\}$，

∴ $\overline{A}\cup B=\{0,2,3,5,7\}$；

∵ $A\cap B=\{2,3,5,7\}$，

∴ $\overline{A\cap B}=\{0,1,4,6,8,9,10\}$。

【例2】设$I=R$，$A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x^2-5x-6=0\}$，$C=\{x|\,|x|\leqslant 3\}$，$D=\{x|x^2-5x+4>0\}$。

求：$\overline{A}\cap C$，$B\cap\overline{C}$，$\overline{C\cup D}$。

解：∵ $\overline{A}=\{x|x\geqslant 2\}$，$C=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，

∴ $\overline{A}\cap C=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$。

∵ $B=\{x|(x-6)(x+1)=0\}=\{-1,6\}$，

∴ $B\cap\overline{C}=\{-1\}$。

∵ $D=\{x|x<1$ 或 $x>4\}$，

∴ $C\cup D=\{x|x\leqslant 3$ 或 $x>4\}$。

∴ $\overline{C\cup D}=\{x|3<x\leqslant 4\}$。

二、映射与函数

（一）映射

1.映射　设A，B是两个集合，如果按照某种对应法则

f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合A、B以及从A到B的对应法则f）叫做从集合A到集合B的映射，记作

$$f: A \to B.$$

象和原象 如果给定一个集合A到集合B的映射，那么和A中的元素a对应B中的元素b叫做a的象，a叫b的原象．

【例3】设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{6,3,11,18,20\}$ 对应法则f是“平方后加上2”，使B中的元素x^2+2和A中的元素x对应．这个对应是集合A到集合B的映射 记作f：$A\to B$．B中的元素6与A中的元素2对应，于是6是2的象，2是6的原象，A中的元素在B中都有象，B中的元素20在A中没有原象．

2.一一映射 设A、B是两个集合，f：$A\to B$是集合A到集合B的映射，如果在这个映射作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象．那么这个映射就叫做A到B上的一一映射．

【例4】设$A=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\cdots\right\}$，取映射$f$：$A\to B$，使集合$B$中的元素$b=\frac{a}{a+1}$和集合$A$中的元素$a$对应．这个映射是$A$到$B$上的一一映射．

3.逆映射 设f：$A\to B$是集合A到集合B上的一一映射，如果对于B的元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样所得的映射叫做映射f：$A\to B$的逆映射．记作f^{-1}：$B\to A$．

显然，映射$f: A\to B$也是映射$f^{-1}: B\to A$的逆映射.

【例 5】设有集合$\overline{R^-}$和$M=\{x| x\geqslant 1\}$，映射f：$\overline{R^-}\to M$，使集合M中的元素a^2+1与$\overline{R^-}$中的元素a对应.

（1）这个映射是一一映射吗？为什么？

（2）这个映射有逆映射吗？如果有，写出它的逆映射.

解：（1）这个映射是一一映射，因为集合$\overline{R^-}$中的不同元素a,b,在集合M中有不同的象a^2+1与b^2+1，而且集合M中的任一元素C，在集合$\overline{R^-}$中有原象$\sqrt{C-1}$；

（2）这个映射有逆映射，它是f^{-1}：$M\to\overline{R^-}$，使集合$\overline{R^-}$中的元素x和集合M中的元素$\sqrt{x-1}$对应.

（二）函数

1.函数　当映射f：$A\to B$中的原象集合A和象集合B都是非空的实数集合或实数集的非空子集，且集合B中的每一个元素都有原象时，这样的映射f：$A\to B$叫做定义域A到值域B上的函数．记作$y=f(x)$．函数是由定义域、值域（都是实数集合或实数集的非空子集）以及定义域到值域上的对应法则三大要素组成的一类特殊映射.

2.反函数　如果确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射f^{-1}：$B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，并习惯记作$y=f^{-1}(x)$．其中的定义域、值域分别是$y=f(x)$的值域、定义域.

函数$y=f(x)$与函数$x=f^{-1}(y)$所确定的x和y间的对应关系是一致的，因此，在同一坐标系内，两函数的图象是相

同的；函数$y=f(x)$与函数$y=f^{-1}(x)$所确定的x和y对应关系不一致，但前者中的x与y互相对调即得到后者的对应关系．因此，在同一坐标系内，两函数的图象关于直线$y=x$成轴对称．

【例 6】求下列函数的反函数：

（1）$y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ （$x\neq-\dfrac{1}{2}$且$x\in R$）；

（2）$y=\sqrt{x+1}$ （$x\geqslant-1$且$x\in R$）．

解：（1）由 $y=\dfrac{x-1}{2x+1}\left(x\neq-\dfrac{1}{2}\right)$可得

$$(2y-1)x=-(1+y),$$

即 $x=\dfrac{1+y}{1-2y}\left(y\neq\dfrac{1}{2}\text{ 且 }y\in R\right)$.

∴ 函数 $y=\dfrac{x-1}{2x+1}\left(x\neq-\dfrac{1}{2}\text{ 且 }x\in R\right)$的反函数是

$$y=\frac{1+x}{1-2x}\left(x\neq\frac{1}{2}\text{ 且 }x\in R\right).$$

（2）由 $y=\sqrt{x+1}$ （$x\geqslant-1$且$x\in R$）可得 $x=y^2-1$ （$y\geqslant0$）．

∴ 函数 $y=\sqrt{x+1}$ （$x\geqslant-1$且$x\in R$）

$y=x^2-1$ （$x\in\overline{R^{-}}$）．

求函数$y=f(x)$的反函数的一般方法是先解出x，$x=f^{-1}(y)$．然后将字母x，y互换，写成$y=f^{-1}(x)$。注意要分别标出$f(x)$与$f^{-1}(x)$的定义域．

三、函数的性质

（一）函数的单调性

1．增函数和减函数　函数$y=f(x)$的定义域是某个区间D，如果在区间D上任取两个值x_1，x_2，它们所对应的函数值分别为$f(x_1)$，$f(x_2)$。

如果当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，那么函数$f(x)$在区间D上是增函数；

如果当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，那么函数$f(x)$在区间D上是减函数。

2．单调函数和单调区间．如果函数$y=f(x)$在区间D上是递增的（或递减的），则称函数在区间D上是单调函数．区间D是函数$y=f(x)$的单调区间。

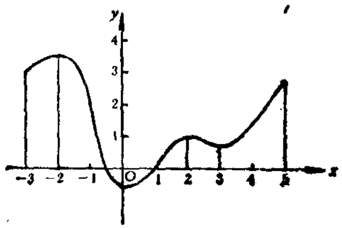

图 1-1-1

【例7】函数$y=f(x)$在$(-3,5]$的图象如图1-1-1所示，根据图象指出它的单调区间，以及在每一单调区间上函数是增函数还是减函数。

解：函数$f(x)$的单调区间有$(-3,-2]$，$[-2,0]$，$[0,2]$，$[2,3]$，$[3,5]$．其中$f(x)$在$[-2,0]$，$[2,3]$上是减函数，在$(-3,-2]$，$[0,2]$，$[3,5]$上是增函数。

【例8】求函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$的单调区间

解：函数的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)$$

$$=(x_2-x_1)-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)$$

$$=(x_2-x_1)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right).$$

（1）当 $0 < x_1 < x_2 \leqslant 1$ 时，有 $0 < x_1x_2 < 1$，$x_2-x_1 > 0$，$\frac{1}{x_1x_2} > 1$，$1-\frac{1}{x_1x_2} < 0$．于是有 $f(x_2)-f(x_1) < 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$．

因此，在区间 $(0, 1]$ 上，函数 $f(x)$ 是减函数．

（2）当 $1 < x_1 < x_2$ 时，有 $x_1x_2 > 1$，$x_2-x_1 > 0$　$1-\frac{1}{x_1x_2} > 0$．于是有 $f(x_2)-f(x_1) > 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$．

因此，在区间 $(1, +\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 是增函数．

（3）当 $-1 \leqslant x_1 < x_2 < 0$ 时，有 $0 < x_1x_2 < 1$，$x_2-x_1 > 0$，$1-\frac{1}{x_1x_2} < 0$，于是有 $f(x_2)-f(x_1) < 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$．

因此，在区间 $[-1, 0)$ 上，函数 $f(x)$ 是减函数．

（4）当 $x_1 < x_2 < -1$ 时，有 $x_1x_2 > 1$，$x_2-x_1 > 0$，$1-\frac{1}{x_1x_2} > 0$，于是有 $f(x_2)-f(x_1) > 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$．

因此，在区间 $(-\infty, -1)$ 上，函数 $f(x)$ 是增函数．

∴函数的单调递增区间是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$