GAILULUN
YU
SHULI
TONGJI

孙清华　万荣国
徐蕴珍　刘吉定
翁晓龙　胡春华
主审:黄光谷

高等学校数学系列教材

概率论与数理统计

湖北科学技术出版社

高等学校数学系列教材

概率论与数理统计

GAILULUN
YU
SHULI
TONGJI

孙清华　万荣国
徐蕴珍　刘吉定
翁晓龙　胡春华
主审：黄光谷

湖北科学技术出版社

高等学校数学系列教材
概率论与数理统计

黄光谷　孙清华　主编

策　　划:李慎谦　　封面设计:秦滋宣
责任编辑:刘　虹　　责任校对:邓　冰

出版发行:湖北科学技术出版社　　电话:86782508
地　　址:武汉市武昌东亭路2号　　邮编:430077

印　　刷:武汉工业大学印刷厂　　邮编:430070

850×1168mm　32开　8.875印张　1　插页　217千字
1998年6月第1版　　1998年6月第1次印刷

印数:0001—7000
ISBN7—5352—2133—5/G·559　　定价:10.60元

序　　言

我们即将进入21世纪，面临信息时代。其特点是信息爆炸，计算机迅速发展、日益普及；数学的应用向一切领域渗透，科技及各行业日益数学化、数字化。我们必须进行教育改革以适应时代的发展。

高等学校传统的数学教材有许多优点，对培养人才起了很大的作用。但反思一下，传统的高校数学教材和教学越来越形式、抽象，多见定义、定理、证明、计算、推导，少见与周围世界及各实际问题和其他学科的密切联系，内容老化，培养学生能力和素质不够，不便于自学。通过数学教学开发智力，达到开发头脑全面考虑科学系统的功能就更差了，这也是一个国际性的问题。目前的高校数学教育对培养绝大多数的非数学专业的人才来说是远远不够的，高校数学教育必须进行改革。

由黄光谷教授等一批老师编写的《高等学校数学系列教材》，顺应了转变教学思想、更新教学内容、改进教学方法、改革创新教材的新形势，他们立足于多年教学实践、探索、改革的基础之上，有深厚的群众基础、素材基础、经验基础和写作基础。这些老师边教学、边写作，精心设计、大胆创新、团结协作，克服了种种困难，终于完成了这项系统工程。

这套教材的每门课程分为三个梯级：主教材、教学指导书和习题解答，它们构成大三级循环。中三级循环为新课、习作课与复习课；小三级为每讲的内容、思考题与习题（含A、B组）。大、中、小三个梯级循环，配合默契，学生学了不愁学不好，不愁能

力和素质不增强。虽减少了课时，但能提高教学的质与量。

这套教材注意继承传统教材的优点，并实行主动式教学法，本着循序渐进的教学原则，注意调动学生学习的主观能动性，实行教与自学双向教学，力求处理好传授知识与培养能力和提高素质的关系，注意培养学生思考、归纳，分析、综合，钻研、类比，判断、选择，联想、应用，建模、创新，等等各种数学方法和能力，让学生在分析问题、解决问题中学会选择方法、检验结果、寻找原因、转换观点等一系列实在的本领，提高学生的素质和数学修养。

这套教材既注意了传授必要的基础知识，又注意介绍建模、数学软件等新概念、新方法和新知识，以适应当今科技迅猛发展的形势。在编写格式方面，大胆采用了按讲编写的新方式，既便于教与自学，还可为后续工程——制作音像教材提供脚本或素材，以便于电化教学之用。

总之，这套教材构思好，声势大，编排新，使用专业多，适用面广，将会在数学教育界引起很大的反响。

编写这套教材是改革数学教育的一种尝试。由于前无借鉴和时间仓促等原因，和任何新生事物一样，这套教材中也会存在一些不足之处，这将会随着试用、修改而日臻完善。我相信这套几百万字教材的出版，定能受到广大师生和教育工作者的欢迎和好评，它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一批奇葩。

华中理工大学教授　林化夷

1997 年 11 月　武汉

目　　录

第一章　概率的基本概念

在人类生存的大千世界里存在着千变万化的现象，如自然现象、社会现象、经济现象、生产现象等等。任何一个现象都不是孤立的，而是由若干个因素组成的。有一类现象的因素之间存在着必然的关系，称为确定性现象. 如平面三角形三内角和为 180 度，上抛石子必然下落，风吹必然草动等等. 表现在数量现象上，就是我们在高等数学中学过的函数关系，如圆的半径为 R 时，圆周长一定为 $2\pi R$，圆面积一定为 πR^2；1 公斤白糖价值 5 元，10 公斤白糖价值一定是 50 元等等. 然而，有一类现象却不是这样，它的因素之间没有必然的联系. 如足球运动员起脚射门，即使在球门前也不一定进球；一个硬币落在地上，有可能正面朝上，也可能背面朝上. 这种在一定条件下发生，但可能出现不同结果，并且在现象发生前不可能预知确切结果的现象称为不确定现象. 由于不确定现象在人类生活中大量存在，对人类活动有着重大影响，人们经过长期研究，终于发现和认识到它的结果存在着某种客观规律性. 这种在大量重复发生的现象中所呈现的规律性，我们称之为统计规律性. 而把在一次试验或观察中结果不确定，在大量重复试验中结果具有某种统计规律性的现象，称之为随机现象.

概率论与数理统计就是研究与揭示大量随机现象的统计规律性的一门数学学科. 它以数学形式展示了现象的过程与结果，提供对现象的预测与推断，在工农业生产、科学技术、社会活动和经济管理等许多方面有着广泛的应用与广阔的前景.

第一讲　随机事件与样本空间

1. 随机试验

为了研究随机现象，我们把对现象的观察和进行的实验统称为试验. 一般用大写字母 E、T……等来表示. 例如：

E_1：观察上午 8 点钟经过某地点的车辆数.

E_2：记录某学生 10 次投篮命中的次数.

E_3：记录电视节目中播音员发音的差错数.

E_4：记录某批产品的平均寿命.

为了使对现象的研究更加合理，使从现象得到的结论更符合真实情况，我们将具有下列特点的试验称为随机试验.

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行；

(2) 每次试验的所有可能结果在试验前可以预知，并且不止一个；

(3) 进行一次试验之前，不知哪一个结果会出现.

正因为试验的可能结果是多个，试验是可重复的，所以试验的结果是不能预知的，只有某一种结果出现的"可能"性. 没有"必然"性. 因而试验才是随机的. 随机试验是我们研究随机现象的主体，以后我们所提到的试验都是指随机试验.

2. 样本空间

随机试验的结果不止一个，而且是事先可以预知的. 因此，我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间；把样本空间的元素——试验 E 的每个结果称为样本点. 通常记样本空间为 S. 例如：

掷一个骰子朝上一面点数的样本空间　$S=\{1,2,3,4,5,6\}$；

检查 10 件产品中次品数的样本空间　$S=\{0,1,2,\cdots,10\}$；

投篮结果的样本空间　$S=\{$命中，不中$\}$；

某天气温的样本空间　$S=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x

表示该天的最低温度，y 表示最高温度；其中 T_0 是该地的最低温度，T_1 是该地的最高温度.

在确定样本空间时，要考虑试验的目的与条件. 如投篮结果考虑得分情况时，样本空间 $S=\{0$ 分，1 分，2 分，3 分$\}$，与上面的情况不同. 所以样本空间必须在认真研究试验的目的与条件后写出，才能满足研究的需要.

3. 随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合 S 是样本空间，作为集合，它包含很多子集合，现在我们利用样本空间子集合来说明随机事件.

由一个样本点所组成的集合，我们称为基本事件. 它表示随机试验的某一个结果发生了. 如掷骰子出现 4 点，是一个基本事件.

由几个样本点组成的集合，我们称为复合事件. 只要组成集合的样本点中有一个出现，即只要随机试验的结果中某一个发生了，就表示这个复合事件发生了. 如掷骰子出现偶数点的事件，包含出现 2 点、4 点和 6 点，掷出 2 点也表示掷出偶数点，是偶数点事件发生了.

样本空间是它自身的子集，它自然是一个复合事件. 而且，每次试验它必然发生，所以称它为必然事件，也用记号 Ω 表示.

空集$\varnothing$不含任何样本点，但我们也把它当作样本空间的子集合. 由于它在每次试验中都不发生，所以称为不可能事件.

这样，只要我们进行一次试验，总有一个事件发生. 由于事件的发生不是必然的，具有一定的随机性，所以把试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称事件. 习惯用字母 A、B、C、D 等来表示.

例如，投三次篮出现同一结果的事件 A_1 是

$$A_1=\{\text{中，中，中；不中，不中，不中}\}.$$

射击一发子弹命中五环以上的事件 A_2 是

$$A_2=\{6,7,8,9,10\}.$$

在一袋装有红、白两色小球的袋中随机摸取三次，恰好摸得两个红球的事件 A_3 是

$$A_3=\{红红白,白红红,红白红\}.$$

4. 事件的关系与运算

我们是用集合的概念来定义事件的，因而自然可以用集合间的关系与运算来处理事件的关系与运算.

定义 1 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A. 记为 $A\subset B$.

如投篮命中包含投篮得 2 分，也包含投篮得 3 分.

定义 2 如果 $A\subset B$，$B\subset A$，则 $A=B$，称事件 A 与事件 B 相等.

两个相等事件含有的样本点完全相同.

定义 3 两个事件 A、B 中至少有一个发生，是一个事件，称为事件 A 与 B 的和事件(并事件). 记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

如某种产品的质量要求有长度和直径两个指标，则产品不合格(事件 C)包含长度不合格(事件 A)与直径不合格(事件 B)或两者都不合格.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

定义 4 两个事件 A 与 B 同时发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件(交事件). 记为 AB 或 $A\cap B$.

如某条串联电路有两个开关，第一个开关接通(事件 A)，第二个开关接通(事件 B)，线路接通(事件 C)，则 $C=AB$.

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$；可列个事件 $A_1,A_2\cdots$的积事件为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

定义 5 事件 A 发生而事件 B 不发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件. 记为 $A-B$.

注意，不要错误地理解只有 $B\subset A$，才有 $A-B$.

定义 6 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或称互斥，记为 $A\cap B=\varnothing$. 否则称事件 A 与 B 为相容事件.

同一随机试验的基本事件必然是两两互不相容的.

定义 7 如果事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，也称为互逆事件.

读者要注意互斥与互逆的不同. 互逆事件一定是互斥的，但互斥不一定互逆. 例如，在产品质量检查中，产品可以是合格品，也可以是废品，合格品又可分一等品、二等品. 那么一件产品不是合格品就是废品，它们是互逆的；而一件产品可以不是一等品也不是废品，它们是互斥的，但不是互逆的. 互斥事件的特征是一次试验中两者都可以不发生，而互逆必发生一个.

事件的运算有与集合运算有相同的规律，我们不再赘述. 只将以下运算规律指出，以引起读者注意.

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

德·摩根律(对偶原理)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

下面，我们通过一些实例来认识事件之间的关系与运算.

例 1 三只考签由三个考生有放回地轮流抽取 1 次，每次一只，试用已知事件表示“至少有一只考签没有被抽到”这个事件.

解 设以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 只考签被抽到事件，则“至少

有一只考签没被抽到"可表示为

$$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3 \text{ 或 } \overline{A_1A_2A_3}.$$

例 2 某车间三名工人各装配一台仪器，成品可能是正品，也可能是次品. 以 A_i 表示事件"第 i 个工人装配的仪器是正品"($i=1,2,3$). 试以 A_i 的表示式表示出下列事件：

(1) 没有一台仪器是次品；

(2) 至少有一台仪器是次品；

(3) 只有一台仪器是次品；

(4) 至少有两台仪器不是次品.

解 由 A_i 的定义知，$\overline{A}_i$ 表示"第 i 个工人装配的仪器是次品"事件. 所以

(1)$A_1A_2A_3$ 表示三台仪器都是正品事件.

(2)$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$ 或($\overline{A_1A_2A_3}$)表示至少有一台仪器是次品，即三台都是正品事件没有发生.

(3)$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$ 表示三台仪器中有两台正品、一台次品的事件.

(4)$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$ 表示三台仪器至少有两台是正品的事件，它比(3)多一种情形——三台全是正品的情形.

例 3 如果以 x 表示一个沿数轴作随机运动的质点的位置，试说明下列事件之间的关系.

$A=\{x\,|\,x<15\}$，$B\{x\,|\,x>5\}$，$C\{x\,|\,x<10\}$，

$D=\{x\,|\,x<-5\}$，$E\{x\,|\,x>10\}$.

解 为直观起见，作图如右.

显然 $A\supset C\supset D$，$B\supset E$.

D 与 B 互斥，D 与 E 互斥. B 与 C，B 与 A，E 与 A 相容，A 与 C，A 与 D，C 与 D，B 与 E 也相容.

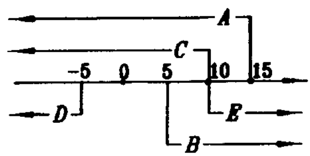

图 1.1

例 4 证明下列关于事件的等式：

(1)$A\cup B=A\cup(B\overline{A})$；

(2)$(A-B)\cup(B-A)=\overline{(AB)\cup(\overline{A}\overline{B})}$；

(3)$B-A=(\overline{AB})-(\overline{\overline{A}B})$.

证明 (1)$A\cup B=A\cup B\cap S=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})$

$$=A\cup AB\cup B\overline{A}=A\cup B\overline{A}.$$

(2)$\overline{(AB)\cup(\overline{A}\overline{B})}=\overline{AB}\cap(\overline{\overline{A}\overline{B}})=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)$

$$=\overline{A}A\cup\overline{B}A\cup\overline{A}B\cup\overline{B}B=A\overline{B}\cup B\overline{A}$$

$$=(A-B)\cup(B-A).$$

(3)$(\overline{AB})-(\overline{\overline{A}B})=(\overline{AB})\cap(\overline{A}B)=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}B)$

$$=\overline{A}B=B-A.$$

在做证明题时，要注意运用运算规律，必要时，可利用作图来帮助思考问题.

思 考 题 1-1

1. 对立事件与互不相容事件有什么联系与区别？
2. 如何用已知事件来表达与之有关的其他事件？试举例说明.
3. 样本空间与必然事件间有什么关系？

习 题 1-1

A 组

1. 写出下列随机试验的样本空间及事件的集合：

(1)一袋中装有蓝、白、黑颜色球各 3 个，同种球标有 1,2,3 以示区别，从中任取一个. 记

A. 取到蓝色球事件； B. 取到不是 3 号球事件.

(2)连续射击两次，记

A. 第一次击中事件； B. 第二次没击中事件；

C. 两次同一结果事件.

2. 将一颗骰子连掷两次与将两颗骰子掷一次，这两个随机试验的样本空

间是否相同？

3. 设 A,B,C 为随机试验 E 的三个事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A,B,C 中至少有一个发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) A,B,C 中不多于一个发生；

(5) A,B,C 中不多于两个发生；

(6) A,B,C 中至少有两个发生.

4. 化简下列各式：

(1) $(A+B)(A+\overline{B})$； (2) $(A+B)(B+C)$；

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

B 组

5. 设 $S=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\{x\mid 1/2<x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid 1/4\leqslant x<3/2\}$. 写出下列事件：

(1) $\overline{A}B$； (2) $\overline{A}\cup B$； (3) $\overline{\overline{A}\overline{B}}$； (4) $\overline{AB}$.

6. 试把 $A+B+C$ 表为互不相容事件的和.

7. 射击运动员向目标射击，目标是三个半径分别为 10，20，30 厘米的同心圆，并标为 r_1,r_2,r_3，记 A_i 为击在半径为 r_i 圆内的事件（$i=1,2,3$），说明下列事件的意义：

(1) $\overline{A}_3$； (2) $A_1\cup A_2\cup A_3$； (3) $A_1A_2A_3$； (4) $\overline{A}_1A_2$.

8. 从下面两式分析各表示 A、B 间有什么包含关系：

(1) $A\cap B=A$； (2) $A\cup B=A$.

第二讲　随机事件的概率

一、频率与概率

对于随机试验，仅仅知道样本空间是不够的. 我们不仅希望了解试验的全部可能结果，更关心某一个结果出现的可能性大小，也

就是某个随机事件发生的可能性究竟有多大，以便预测或控制它的发生，利用它解决某个问题.

从实际生活中，我们认识到，要对某个事件发生的可能性大小，作出较为准确的判断，只凭一次试验是不行的. 为此，我们引入频率的概念，由多次试验中事件发生的频繁程度来描绘一次试验中事件发生的可能性大小.

1. 频率

定义 1 在相同条件下进行的 n 次试验中，事件 A 发生的次数称为 A 发生的频数，记为 n_A. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

显然，$f_n(A)$反映了事件 A 在多次试验中发生的频繁程度. 而且，我们从试验中认识到，当试验次数 n 不同时，$f_n(A)$一般是不相同的. 这个性质，称为频率的随机波动性. 从大量试验中人们认识到，在 n 增大时，频率的随机波动的幅度是变小的，逐渐稳定于某个确定的值 $P(A)$.

频率具有以下的基本性质：

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(S)=1$；

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

上面我们已经讲到，当 n 增大时，频率 $f_n(A)$逐渐稳定于某个常数. 对于每个事件 A，都存在这样一个与之对应的常数 $P(A)$，可以用它来描绘一次试验中事件 A 发生的可能性的大小. 因此，这种“频率稳定性”就是大量重复试验表现出来的统计规律性，完全可以用它来解释随机现象.

2. 概率

定义 2 设 S 是随机试验 E 的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$满足下列条件：

(1)对于任一事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2)对于 S,有 $P(S)=1$;

(3)对于两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$,有可列可加性,即

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \quad (1)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

在第四章中,我们将利用大数定律证明,当 $n\to\infty$ 时,$f_n(A)\to P(A)$,从而为用 $P(A)$ 刻划事件 A 在一次试验中发生的可能性大小找到理论依据. 也可以用数值 $P\sim n_A/n$ 来定义概率,通常称为统计概率. 还可以把事件 A 与样本空间分别表述为几何量 S_A 与 S,用 $P=S_A/S$ 来定义概率,称为几何概率,它们都是概率.

今后,我们要确定一个量是否是概率,就可以用定义 2 中的三个条件来衡量.

3. 概率的运算性质

由概率的定义,我们可以得出概率的一些重要性质.

(1)不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

因为,若 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,(i\neq j)$,所以

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

即

$$P(\varnothing)=0.$$

(2) 两互斥事件之和的概率,等于两事件概率的和. 即若 $A\cap B=\varnothing$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \quad (2)$$

因为,$A+B=A+B+\varnothing+\varnothing+\cdots$,由概率可列可加性,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$
$$=P(A)+P(B).$$

推论 1 有限个两两互斥事件之和的概率,等于这些事件概