Kexuezhiwang

科学之王

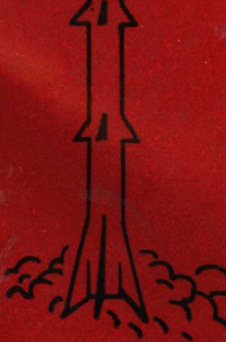
数学的历史、思想与方法

张柏平　朱家生　编著

梁宗巨　审订

$$\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$



河南教育出版社

科 学 之 王

——数学的历史、思想与方法

张柏平　朱家生　编著

梁宗巨　审订

河 南 教 育 出 版 社

科　学　之　王

——数学的历史、思想与方法

张柏平　朱家生　编著

梁宗巨　审订

责任编辑　王　卫

河南教育出版社出版

河南第二新华印刷厂(联)印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米　32开本　11印张　248千字

1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷

印数　1—2030册

ISBN7-5347-0595-9/G.498

定价　3.85元

序

本书的特点，是将数学知识和它的历史结合起来，除了深入浅出地介绍知识本身外，还插入数学家的传记，和解决问题的思想方法等，读起来颇能引人入胜。

这些问题很多是带有根本性或富有启发性的，内容涉及古今中外，但重点在近现代。如对策论、模糊数学、罗素悖论、计算机科学等都是本世纪的重大问题。数学是人类文化的重要组成部分，今天已渗透到各种知识领域里去，特别是电子计算机出现以后，更使人类的活动和数学密切地联系起来。数学科目繁多，要全面掌握当今的数学几乎是不可能的事。不过通过数学史的学习，可以大致了解当前的发展情况。作者当更希望这本小书能激发起广大读者的兴趣，积极学习先辈们刻苦钻研的精神，去掌握数学这门有广泛应用的科学，为祖国四化建设贡献力量。

梁宗巨　1989.9.3

前　言

“在过去的四分之一世纪中，数学和数理技术已经渗透到科学、技术和生产中去，并成为其中不可分割的重要组成部分。在现今这个技术发达的社会里，扫除‘数学盲’的任务已经代替了昔日扫除‘文盲’的任务而成为当今教育的重要目标。人们可以把数学对我们社会的贡献比喻为空气和食物对生命的作用。事实上，我们大家都生活在数学的时代，我们的文化已数学化，在我们周围神通广大的计算机最能反映出数学的存在。”这是1984年美国国家研究委员会的一份重要报告中的一段话。它充分反映了做为一个现代人必须达到基本数学水平的客观要求。

但是，发展至今的数学学科是那样庞大，内容又是那样艰深、严谨，学习哪些数学知识才算达到基本的要求呢？怎样才能掌握、应用好这些基本的数学知识呢？或许大家都有自己不同的标准和方法。但是，若能在一些基本的、主要的数学理论和方法的学习中，同时了解这些数学知识产生的背景，了解那些问题的提出和解决的过程，了解在这些过程中表现出的丰富的、充满智慧和哲理的思想，无疑将会使学习和掌握数学知识事半而功倍。因此产生了本书写作的初衷。

有些专家说：“什么是数学呢？数学就是数学家的思想与活动。”这样在我们谈论数学的方法、历史和思想时，就不能不涉及

与此紧密相联的数学家们。一般地，数学家都是哲学家或有着较高的哲学修养，这是从古希腊就流传下来的特点。由于这个与一般人不同的显著特点，使得数学家们能从哲学的高度去看问题，从整个数学的内在统一性去处理解决问题，而不象一般人那样只见树木、不见森林。同时，数学家也是血肉丰满的人，在他们周围也不是超凡脱俗的蓬莱天国。这就决定了本书应具有知识性、哲理性、趣味性的特点。

为了以上宗旨和特点我们是尽力去做了。请读者去评价吧！我们希望本书能对大、中学生掌握、应用数学理论和方法提供一些帮助，希望它能对从事数学或数理哲学工作的教师、工作者和爱好者提供一些参考。

著名数学史专家，全国数学史学会副理事长梁宗巨教授挤时间仔细审阅了本书的初稿，提出了很多宝贵意见，并为本书作序。这对我们是莫大的帮助。对此，我们表示衷心的感谢！

书中资料取自各种数学史、数学杂志和数学丛书，因篇目较多，恕不一一注明。对所用资料的作者，谨表感谢！

由于我们水平有限，书中在阐明观点和引用资料时，难免有谬误和不当之处，希望能得到广大读者的批评和指正。最后，希望大家能接受它、喜爱它！

编　者

1988年11月

目 录

1. 从七桥问题谈起

对外部世界进行研究的主要目的，在于发现上帝赋予它的合理次序与和谐，而这些是上帝以数学语言透露给我们的。

——开普勒

认识一位天才的研究方法，对于科学进步，……并不比发现本身更少用处。科学研究的方法经常是极富兴趣的部分。

——拉普拉斯

哥尼斯堡是座风景优美的历史古城，东普鲁士王朝于十三世纪中叶建都于此。普累格尔河两条最大的支流在这城里汇合后，流入波罗的海。虽然哥尼斯堡距普累格尔河的入海口有7公里，可是波罗的海浓烈的海水气和鱼腥味还是到处可闻。大群的海鸥常在城内绿草地上恬静地休息。传统的哥特式建筑参差鳞立。受海洋性气候的影响，空气清新、湿润，街道清洁、安静，风景优

雅。哥尼斯堡城有很深的文化渊源 著名的大唯心主义哲学家、星云假说的创始人伊曼纽尔·康德就出生在这个城市里。这位哥尼斯堡最伟大的居民，终生生活在这座城市里。他的墓地就座落在普累格尔河支流汇合处的克奈芳福岛上。著名数学家希尔伯特、哥德巴赫等也出生于此城。哥尼斯堡还是一个很有名的战略要地。二次大战后，这里是苏联的加里宁格勒。苏联庞大的波罗的海舰队基地，就设在这座城市里。但是，想不到使这座古城知名度更高、载入史册的，竟是个有名的数学难题——哥尼斯堡七桥问题。

由于普累格尔河的两条支流在市内汇合，将全城分为北区、东区、南区和中间的克奈芳福岛区。岛上除了有被月桂花环簇拥的康德墓地外，还有著名的哥尼斯堡大教堂和古老的哥尼斯堡大学。为了交通方便，市内先后建了七座各具特色的大桥。其中有五座将河岸与河中的克奈芳福岛连接起来（如图1—1)。在这七座漂亮的大桥落成后，哥尼斯堡的居民和大学生们经常在桥上散步，浏览市容，欣赏颇具匠心的七座桥。于是，很自然就产生一个问题：能不能找到一条路线，可以通过所有这七座桥，每座桥恰好只通过一次，最后又恰好回到原出发点？这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。

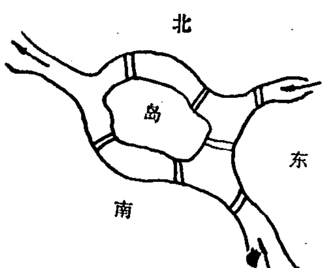


图1—1

这个问题似乎不难，当时城里的居民、大学生与到此观光的旅游者都热衷一试。可是，千百次试验都没能成功。读者不妨按图1—1自己试一下。当然，没找到并不能说明这样的路线不存在，也许可能的路线太多，没能找到罢了。有人计算认为，符合

上述约定的可能路线应是7！＝5040条。这也是不对的（读者可以想想为什么），实际可能的路线是个很复杂、较大数目的组合数。这个问题是那样简明、普通、富有生活情趣，但又是那样困难！这激起人们更大的好奇心，并由观光者将问题带到全世界。

哥尼斯堡的大学生们给当时最著名的大数学家欧拉去信，向他请教这个问题。对这个极富生活趣味的问题，欧拉进行了抽象分析。虽然他没有到哥尼斯堡去，却蛮漂亮地解决了这个问题。他认为满足约定的路线是不存在的。1736年他就此在圣彼得堡科学院作了一次报告。欧拉使用的方法是那样简明、可信，问题解决得又是如此彻底，令人叹服！下面让我们来分析欧拉解决问题的过程，欣赏他那超凡脱俗的高明思维吧！

首先，欧拉仔细地分析了这个问题，发现，在设计满足约定要求的路线时，因为图1—1中北区、岛区、南区、东区都有许多街道，任何一条路线在这四个市区通过时，不可避免地要选择路线通过的街道。若考虑街道的选配，将是很复杂的。欧拉认为在选择路线的过程中，起关键作用的是七座桥如何依次地、不重复地通过，与这四个市区中街道如何选关系不大。另外也与这七座桥的曲直长短无关。基于这样的看法，欧拉把北区、岛区、南区、东区分别看成是A、B、C、D四个点，将七座桥看成是七条连接于这四点间的线条。于是，图1—1中的市区图就被简化为图1—2的图形。这样一来，一次不重复地通过图1—1市区中的七座桥问题，就简化为一笔不重复地画出图1—2中图形的问题。很显然，问题通过欧拉的分析、抽象、转

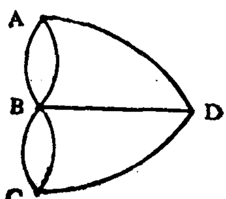


图1—2

化，更简明了，问题的实质更突出了。这为下一步问题的解决拓清了轮廓，奠定了良好的基础。

接着，欧拉认为对于图1—2，这个反映哥尼斯堡七桥问题的一笔画图形，当然可以就具体问题来研究解决。如可以"细心地把所有可能的走法列成表格，逐一检查哪些（如果有的话）是满足要求的"。但是，欧拉认为这样做存在两个问题。第一，这样做太困难了。因为可能的路线计算起来，仍将是一个很复杂、数目很大的组合数。并且，是否一定存在满足要求的路线，也还是一个未知数。第二，这样做太特殊了。即便是这样做能找到满足要求的路线，对于其他类似的情况，或者桥数更多的情况，由于涉及到的组合数更大,可能这个方法根本就不能用了。欧拉认为应该寻找一种更一般的方法，不是就具体问题进行讨论，而是抽象地讨论一般的一笔画图形的问题。他说："我相信，这样的方法简单得多。"这种方法"能告诉我们一下子找出满足要求的路线"。

在抽象地讨论一般的一笔画图形问题中，欧拉首先分析了一笔能画出的图形具有什么样的特征。通过分析发现，一笔画出的图形是从图形的某一点出发，到某一点终止，因此，只有一个起点和一个终点，其余各点都是经过点。

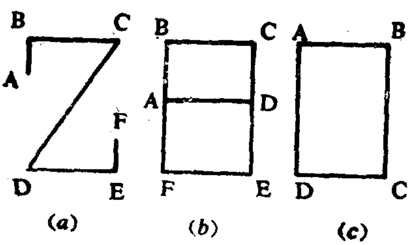


图1—3

因为要从起点画出，所以在起点处至少应有一条线与之相连。如图1-3(a)，图形从A点画出，有一条线与A点相连。若还有其它线在起点处交叉，则因为总是一进一出相伴，所以起点处交

叉的线条数应是一、三、五等等。如图1-3(b)，图形从A点画出，后来又有线在该点经过，故该点处有三条线交叉。也就是说，起点处要有奇数根线相交叉。我们称这种点为奇顶点。

在终点，因为最终要在终点画进，所以在终点处至少也有一条线与之相连。同理 若还有其它线在终点处相交叉，也应是一进一出相伴的。这样，终点交叉的线段数也应是奇数。也就是说终点也是奇顶点。

至于其余经过点，既然是经过，必定是先进后出。这样，经过点无论被经过多少次，在该点处交叉的线段数总应是偶数。我们称这种点为偶顶点。如图1—3(a)中B、C D、E是经过点，各有两条线在这些点处交叉。这样，因为一笔画出的图形只有一个起点，一个终点，所以，一笔画出的图形的一个明显特征是：只有两个奇顶点，若还有其它点，应是偶顶点。如图1—3(a)、(b)图形均可一笔画出。

特别地，当起点也是终点时，因为最初由该点画出，最终又在该点画进，因此，该点也应是偶顶点。如图1—3中图形(c)，也是可一笔画出的（从任一点开始均可），而每一点均是偶顶点。这时的一笔画出图形的奇顶点个数是零。这种情况反映到实际中，就是选择的路线最终能回到原出发点。通过分析，欧拉得出一般性的结论：

一笔画出的图形中，奇顶点数为2或0。

同时，欧拉又给出：对于一个连通在一起的一笔画图形，若图形的奇顶点数是2或0，则这个图形一定可以一笔画出。并且说明，当奇顶点数为0时，从图形的任一点画起都可以；若奇顶点为2时，起点必须选在奇顶点处。这样，欧拉给出一般性的一笔画定理：

一笔画出图形的充分必要条件是该图形的奇顶点数为0或2。

对于具体的哥尼斯堡七桥问题，因为相应的图形（见图1—2）中A、B、C、D四点都是奇顶点，所以不可能一笔画出，并且最后也不可能还回到起点。即使是不要求回到起点，也不可能一笔画出。因此，不管要求不要求回到出发点，要不重复地一次走遍哥尼斯堡的七座桥是不可能的。

根据欧拉给出的一笔画定理，我们可以编出一些情况更复杂的一笔画问题。如欧拉设计了一个十五座桥的问题（如图1—4），问能否不重复地一次走遍这十五座桥。利用欧拉的一笔画定理，我们不难得出肯定的答案，并且满足要求的路线不止一种。这个问题可以留给读者自己一试。

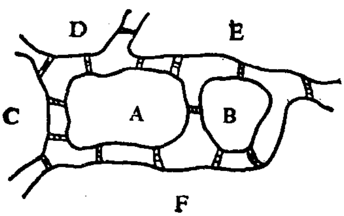


图1—4

根据欧拉给出的结论，要想使不重复地一次走遍哥尼斯堡七座桥成为可能，只须在图1—2的A、B、C、D四点中任意两点间再架一座桥，即可得到解决。因为这时，图形中就只有两个奇顶点了。若允许每座桥可以走两遍，那么，不再架桥，也可将哥尼斯堡七座桥走遍。因为这时，每座桥相当于两座桥，而相应的图形中奇顶点数是0。

以上，我们看到了欧拉解决哥尼斯堡问题的全部过程。欧拉称自己解决这个问题的结果将是一门数学新学科的滥觞。由于欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题时表现出的超人智慧，由于他得出的结果又是那样简明、可信、可行，而且这些结果后来又确实成为一门数学新学科的嚆矢，因此，该城虽然早已易名为加里宁格勒，

但哥尼斯堡的名字却因此仍在世界数学界广为使用。在我们对欧拉解决哥尼斯堡七桥问题的过程表示赞叹、敬慕之余，很自然也会有几个问题。欧拉在远离哥尼斯堡的彼得堡，那样毋庸置疑地解决了当地人解决不了的问题，使用的方法是什么？认识天才们使用的方法或许比认识天才们的工作更有用。欧拉解决问题的结果到底引起了哪门数学新分支？欧拉生平如何？他就只会解决哥尼斯堡七桥问题吗？这些问题的回答将进一步加深我们对欧拉及哥尼斯堡七桥问题的认识。

非刚体几何学

哥尼斯堡七桥问题的解决是一种新几何学的先声。之所以称其为新几何学，是相对欧几里得几何学而言的。在解决哥尼斯堡七桥问题的十八世纪以前，欧几里得几何一统天下的局面，已经持续了二千多年。数学家们大都感到这种局面是片面的、畸型的。莱布尼兹曾预料将会出现一种用纯粹几何方法来研究图形的新几何学。但是，新的几何学究竟是什么样子，除了猜测，谁也说不太清楚。

实际上，传统的欧氏几何在研究图形时，不仅使用了几何的方法，同时也使用了代数的计量方法。例如需要考虑图形中角度的大小，线的曲直，线段的长短等。在欧氏几何中，讨论两个三角形全等时，实际上是经过“搬动”一个使之与另一个重叠，若两个三角形能够重合，则称之为全等。关于三角形全等的“边、角、边”、“角、边、角”、“边、边、边”判断法则，就是一种大小长短的度量标准。

欧氏几何中，讨论三角形全等时，将一个三角形“搬动”至另一个三角形上进行相比。这时，我们是假设经过“搬动”后的三角形大小长短不变化，否则，“搬动”后的三角形一经变形，再与另一个三角形相比，就没意义了。要保证“搬动”后的三角形无变化，必须保证三角形中任二点间的距离在“搬动”中不变。这种情况仿佛三角形是用硬纸板、钢板做成的。这种物体在物理学中称为刚体，因此，有些数学家称欧氏几何学为刚体几何学。

欧拉在研究哥尼斯堡七桥问题中，牵涉到对图形的研究，这当然也是一种几何学。但与欧氏几何学不同的是，研究只与图形的位置有关，只研究图形中点、线间的位置关系，并不考虑长短、大小、曲直的问题，因此，也用不到量的计算等代数的方法。如果与前述欧氏几何对三角形全等的讨论相比较，这种新的几何学研究的三角形似乎是用儿童玩的软胶泥做成的。在“搬动”中，尽管这个三角会被扭曲，两点间的距离会变化，直线会变曲，但是，只要不撕破，它仍有三个顶点，有三条边，并且，这些点、线间的次序并没打破；也就是说其相互间的位置没改变。这种“搬动”后的三角形，在新几何学中，与原来“搬动”前的三角形是“相等”的。以此观点看，所有三角形，无论大小、形状如何，都是“全等”的。因为这些三角形都有三个顶点，三条边，并且其间相互位置也一样。

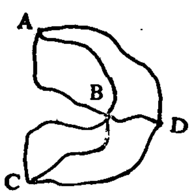


图 1—5

再如，相应于哥尼斯堡七桥问题的图形，可以由图1—2给出，也可由图1—5给出。尽管这两个图形以欧氏几何学的眼光来

看，是那样大相径庭。但是，就点与线的位置关系来说，却是一一对应的。因此，在研究哥尼斯堡七桥问题时，图与图的功效是完全一样的。这种新几何学，由于不考虑大小、长短的度量和计算，仿佛图形是用极易变形的材料做成的，显然是非刚体几何学了。由于它主要是研究图形中的位置，所以也称它为“位置几何学”。这个名字虽是莱布尼兹提出的，但是第一个基本定理却是欧拉给出的。“位置几何学”后来主要发展成称作图论和拓扑学的两个数学分支。

图论是一个应用十分广泛而又极其有趣的应用数学分支。在“位置几何学”中，图论主要研究由点、线构成的图形，以及在这些图形中找到满足某种要求的路线。在研究过程中，不考虑边的曲直长短等度量性质。随着图论的深入研究，在物理、化学、生物、科学管理、计算机等各个领域都可以找到图论的足迹。因为，图最能简单明了地表现出问题的实质，便于对问题进行分析。在各个学科中，都大量地使用着图形。图论有着广泛的应用，不仅在自然科学中，就是在社会科学、文学中，图论也有着功夫独到的应用。例如，看过古典文学名著《红楼梦》的人，一定对曹雪芹笔下几百个栩栩如生、个性鲜明的人物有深刻的印象。但是，对荣国府中的世系、他们之间的关系并不一定十分清楚。而当你看到左图时，一定会对荣