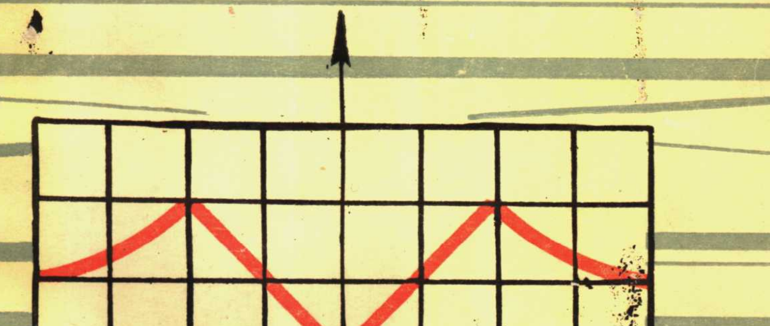
中学数学解题方法漫谈

李　平　杨　靖、陆文镕　编著



西南師範大學出版社

中学数学解题方法漫谈

李　平　杨永靖　陆文镕　编著

西南师范大学出版社

内容提要

本书旨在介绍解中学数学题的各种实用思考方法，通过书中大量例题的合理分析，读者将学到运用综合法、分析法、归纳法、同一法、反证法、解析法、实验法、分类法、参数法等解题思考方法。本书综合讨论中学代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何各种习题及一些数学竞赛题，有较大知识复盖面及典型性。本书的编写采用漫谈方式、语言形象通俗。特别适宜中学生阅读，是高中学生比较理想的课外读物。也可供中学数学教师和师范院校学生参考。本书配有练习并附答案或提示。

中学数学解题方法漫谈

李 平 杨永靖 陆文镕 编著

西南师范大学出版社出版（重庆北碚）
重庆新华印刷厂印刷
新华书店重庆发行所发行
*
开本：787×1092 1/32 印张：8 字数：170千字
1986年2月第一版 1986年2月第一次印刷
印数：1—10,000

书号：7405·2 定价：0.98元

前　言

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学。为了配合中学生学习数学的需要和中学数学教师指导学生学习的需要，我们根据中学数学的基本内容，提出了若干方面的问题，编成此书。

多年来，在数学教学实践中，我们往往考虑数学知识多，而忽略了在数学思想和数学方法方面的训练。在培养及提高学生分析问题和解决问题的能力时，还不善于根据“数学是辩证法的辅助工具和表现方式”的这一特点，用运动变化的观点，数形结合的方法，去武装学生的头脑，从而调动学生的学习积极性和创造性。

本书的编写是一个尝试。我们试图在总结经验的基础上，把这些经验融汇于合理的数学方法中去，体现辩证法对数学的指导作用。希望广大的中学生和我们一起对书中各章的问题，通过思考、议论、分析、去发现问题，掌握实质，注意变化，解决矛盾，考虑引伸，从而达到举一反三，学有所得的目的。

数学家P．R．Halmos指出：数学问题是数学的心脏。解题是学会数学思维的主要途径。解题是使我们掌握数学知

识，发展数学能力的重要手段。解题对于学习数学是必不可少的。本书就是一本解题训练的小册子。

"观察、分析、推理、探索"是本书的中心思想。我们希望这本小册子，有助于读者沿着观察、分析、推理、探索的思维途径去辩证地学习数学，提高自己分析问题和解决问题的能力。

杨昌琪同志为本书制图，在此表示感谢。

作　者

1985年5月

目　　录

第一章　运动变化　解题之本

学习数学离不开解题．解题的过程，就是从问题的条件出发，根据数学基础知识，运动变化，达到问题结论的过程．

对于一个数学问题要得到它的解，首先要细心审题、认真分析、弄清问题的实质．

问题的实质明确了，不等于问题就解决了．数学基础知识是解答数学问题的依据，要解好数学题就得有牢固的数学知识基础．

有了知识基础，还得运用合理的方法，才能促成运动变化，使问题由条件向结论转化．这里的基本方法有：综合法、分析法、同一法、反证法等逻辑方法；综合除法、待定系数法、坐标法、复数法等数学方法；以及带一定技巧的换元法、消去法、参数法等解题方法．本章我们将通过一些具体的例子给同学们介绍这些方法的应用．

例一　已知：$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$

求：$\sin(\alpha+\beta)$的值．

分析：$\because \cos\alpha - \cos\beta = \dfrac{1}{2}$ (1)

$\because \quad \sin\alpha - \sin\beta = -\dfrac{1}{3}$ (2)

由$(1)^2+(2)^2$，并化简，得 $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{59}{72}$.

要用这个中间结果直接推出结论是困难的，暂时搁下它，沿另一途径思索。

由$(1)\times(2)$得

$$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + \sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(\sin2\alpha + \sin2\beta) - \sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{6}$$

这时联想到第一次尝试得到的中间结果，就有：

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{12}{13}$$

下面我们走第三条路。

由(1)有 $\quad -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$ (3)

由(2)有 $\quad 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = -\dfrac{1}{3}$ (4)

由(3)+(4) 得 $\quad \mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\frac{2\text{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{12}{13}$$

上面的分析中，第一条路走起来有困难，我们暂把它搁下。第二条路变形过程中出现了$\sin(\alpha+\beta)$，同时也出现了另一个未知数$\cos(\alpha-\beta)$。幸得有了前面由第一条路得到的中间结果，才消除了这个障碍。第三条路一开始便出现了比较光明的前景：由(1)、(2)得到$\text{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$，用“万能代换公式”很快就解决了问题。

一个题目的条件，借助于数学知识可能推出许多不同的结果来。这些结果中有些与题目的结论关系密切些，有些则不然，这就有一个如何取舍的问题。由所得的结果再推出新结果又有一个取舍问题，如此等等。这样就可以将条件逐步转化使之与结论靠近，最后达到结论。这种寻求解题途径的方法，就是通常说的综合法。

例二　设直角三角形的两直角边为x, y，斜边为z。试证明，对于任何正数m、n，总有$\frac{mx+ny}{\sqrt{m^2+n^2}}\leqslant z$。

分析：本题直接从已知条件入手进行论证较困难，尝试对结论变形：

$\because\quad \sqrt{m^2+n^2}>0$，$z>0$，$mx+ny>0$。

$\therefore\quad m^2x^2+n^2y^2+2mnxy\leqslant z^2(m^2+n^2)$

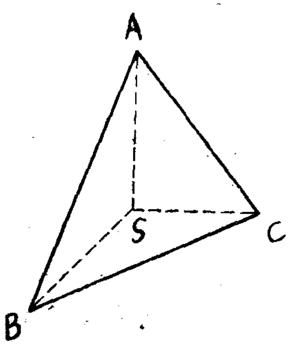
由勾股定理得

$m^2x^2+n^2y^2+2mnxy\leqslant m^2x^2+n^2y^2+n^2x^2+m^2y^2$

$\therefore\quad (nx-my)^2\geqslant 0$

$(nx-my)^2 \geqslant 0$显然成立．逐步逆推回去，就知道原命题成立．这里要注意的是，上面的推理每一步是否可逆，必须是可逆的，才能说解题途径被找到了．

有的题目，要将条件逐步转化达到结论比较困难．这时可以把结论变成较易证明的结论，再变成更易证明的结论，一步一步直至明显地看出结论正确时为止．这种从结论开始一步步地分析、探求结论和已知条件的联系，直至找出题解的方法，就是通常说的分析法．



（图一）

例三　三棱锥$S-ABC$中，SA、SB、SC两两垂直，SA、$SB+SC$都为定值．求证：当$\triangle SBC$的面积最大时$AB+AC+BC$的值最小．（图一）

分析：由条件入手．

$$\because \quad \sqrt{SC \cdot SB} \leqslant \frac{1}{2}(SC+SB)$$

$$\therefore \quad S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}SC \cdot SB \leqslant \frac{1}{8}(SB+SC)^2$$

而$SB+SC$为定值，所以$S_{\triangle SBC}$最大时，$SB=SC$．

再从结论入手，要证$AB+AC+BC$最小，只要证明：

（1）$SB=SC$时，BC最小（$SB+SC$为定值）．

（2）$SB=SC$时，$AB+AC$最小（SA、$SB+SC$为定值）．

对于（1），在$Rt\triangle SBC$中，因为$SB+SC$为定值，所以当两直角边$SB=SC$时，斜边BC最小．

对于（2），因为$AB+AC=\sqrt{SA^2+SB^2}+\sqrt{SA^2+SC^2}$，

所以当$SB=SC$时， $AB+AC=2\sqrt{SA^2+\left(\frac{SB+SC}{2}\right)^2}$.

故需要证明：

$$\sqrt{SA^2+SB^2}+\sqrt{SA^2+SC^2}\geqslant 2\sqrt{SA^2+\left(\frac{SB+SC}{2}\right)^2}$$

两边平方，整理得

$$\sqrt{(SA^2+SB^2)(SA^2+SC^2)}\geqslant SA^2+SB\cdot SC$$

两边再平方，整理得

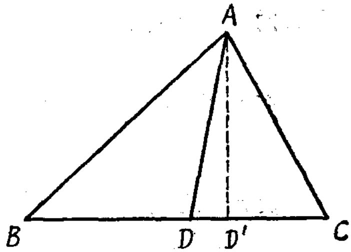
$$SA^2\cdot SB^2+SA^2\cdot SC^2\geqslant 2SA^2\cdot SB\cdot SC$$

即 $SB^2+SC^2\geqslant 2SB\cdot SC$.

显然 $SB^2+SC^2\geqslant 2SB\cdot SC$ 是成立的($SB=SC$时取等号)。上面的推理每一步都可逆，故问题得证。

从例三可以看到交替使用分析法和综合法往往是寻求解题途径的有效手段。

例四 $\triangle ABC$中，D是BC边上的一点，且$BD:DC=AB:AC$。求证：AD是$\angle A$的平分线(图二)。



(图二)

分析：因为$\frac{AB}{AC}$是定值，所以按定比内分线段BC，内分点唯一存在，故本题可用同一法证明。

设 $\angle BAC$的平分线为AD'，则有 $\frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}$,

又 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, $\therefore$ $\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}$.

由合比定理，得

$$\frac{BD'+DC'}{D'C}=\frac{BD+DC}{DC},\quad \frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC},\quad D'C=DC.$$

所以D与D'重合．故AD与AD'重合．这就证明了AD是$\angle BAC$的平分线．

当命题符合同一法则时，证明逆命题正确，从而由等效性肯定原命题正确的证明方法，叫同一法．（两个互逆命题，当已知其一成立时，立知他一也成立．这就是通常所说的同一法则．）

例五　在平面上任取三个点，其坐标均为整数．证明此三点不能是一个正三角形的三个顶点．

分析：在坐标平面内，设A、B、C三点的坐标依次是$(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、$(x_3,\ y_3)$，(x_1，y_1，x_2，y_2，x_3，y_3均为整数)．假定$\triangle ABC$是正三角形，则$\triangle ABC$的面积可用下面两种方式计算：

(1) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$的绝对值．

由已知条件知，$\triangle ABC$的面积是有理数．

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB||AC|\sin A=\frac{1}{2}|AB|^2\sin 60^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]$$

由已知条件知，$\triangle ABC$的面积是无理数．

这就得到了两个互相矛盾的结果，所以假设不成立．问题得证．

提出与命题结论相反的假设，由此推出矛盾的结果，从而否定假设。根据排中律，就肯定了命题的结论。这种证题方法叫做反证法。

综合法、分析法、同一法、反证法是我们解数学题时常用的逻辑方法。

例六　已知方程 $x^2-y^2+dx+ey+f=0$ 表示两条直线，求证：$d^2-e^2-4f=0$。

证明：若方程 $x^2-y^2+dx+ey+f=0$ 表示两条直线．则有

$$x^2-y^2+dx+ey+f=(x+y+k)(x-y+m)$$
$$=x^2-y^2+(k+m)x+(m-k)y+mk$$

比较对应项的系数，得

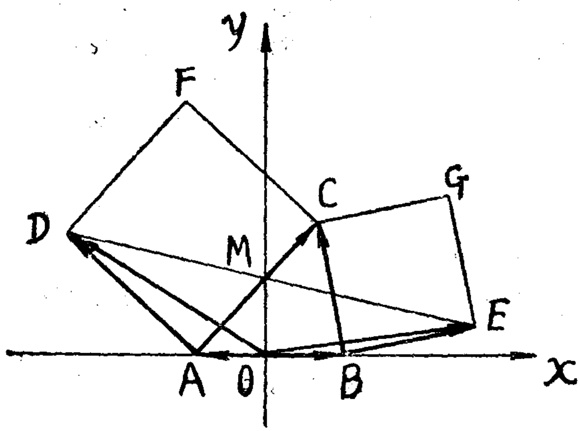
$$d=k+m \tag{1}$$
$$e=m-k \tag{2}$$
$$f=mk \tag{3}$$

由(1)，(2)得，$m=\dfrac{d+e}{2}$，$k=\dfrac{d-e}{2}$。代入(3)，得

$$f=\frac{d+e}{2}\cdot\frac{d-e}{2},\ \text{即}\quad d^2-e^2-4f=0.$$

本题是用待定系数法解答的。待定系数法是根据多项式恒等的条件来解决问题的一种常用代数方法。本题具备多项式恒等的条件，所以可以用待定系数法来解答．

例七　A、B为平面上两定点，C为平面上直线AB同侧的一个动点。分别以AC、BC为边，在$\triangle ABC$的外侧作正方形$CADF$和正方形$CBEG$。求证：无论C点取在直线AB同侧的任何位置，DE的中点M为定点(图三)。



（图三）

证明：取AB的中点O为复平面原点，AB所在的直线为实轴，过O与AB垂直的直线为虚轴。

设A、B对应的复数为-1与1，C对应的复数为z，则

$$\overrightarrow{AC}=z-(-1)=z+1,\qquad \overrightarrow{AD}=(z+1)i$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=-1+(z+1)i$$

故D对应于复数$-1+(z+1)i$

$$\because\quad \overrightarrow{BC}=z-1\qquad \overrightarrow{BE}=(z-1)(-i)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=1+(z-1)(-i)$$

所以E 对应于复数$1+(z-1)(-i)$

$\therefore$ DE的中点M对应于复数

$$\frac{[-1+(z+1)i]+[1+(z-1)(-i)]}{2}=i$$

$\therefore$ DE的中点M为定点。

根据复数的向量表示，可以把几何问题转化为复数问题。

转化后的问题是能够借助于复数的知识来解决的。用复数法解几何题思路十分清楚。

待定系数法、复数法等数学方法的运用是一个能力问题。任何数学能力都涉及知识的灵活运用。只有不断地耐心地把作为能力的基础知识掌握牢固，能力的形成才会收到事半功倍的效果。

例八　解方程：$x^2-x-10-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

解：原方程变形为

$$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$$

即
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$$

设 $x+\frac{1}{x}=y$。则方程化为

$$y^2-y-12=0$$

$\therefore\quad y_1=4\qquad y_2=-3$

由$y_1=4$　得$x+\frac{1}{x}=4$。

$\therefore\quad x_1=2+\sqrt{3}, x_2=2-\sqrt{3}$

由$y_2=-3$　得$x+\frac{1}{x}=-3$。

$\therefore\quad x_3=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x_4=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

经检验知，x_1，x_2，x_3，x_4 均是原方程的解。

把本例中的方程稍加整理就能看出可用换元法解。由于用了这种技巧性的解题方法，解答显得简捷。

例九　已知：$a\sin\theta+b\cos\theta=m$，$b\operatorname{tg}\theta-a=n\sec\theta$

　　　求证：$a^2+b^2=m^2+n^2$

证明：$a\sin\theta+b\cos\theta=m$　　　　（1）

由　　$b\operatorname{tg}\theta-a=n\sec\theta$，

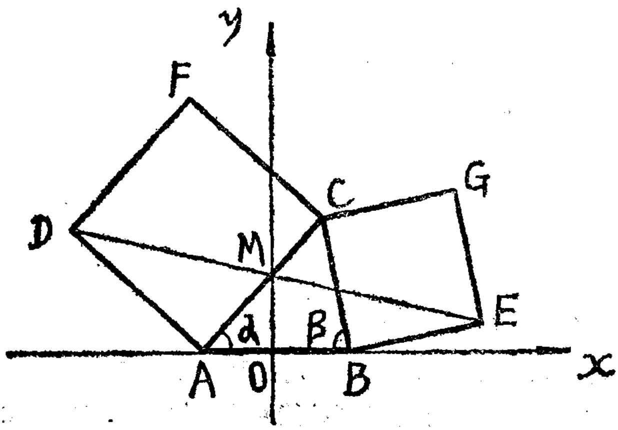
得　　$b\sin\theta-a\cos\theta=n$　　　　（2）

（1）^{2}+（2）^{2}，得

$$m^2+n^2=(a\sin\theta+b\cos\theta)^2+(b\sin\theta-a\cos\theta)^2$$
$$=a^2+b^2$$

本例是一个证明条件等式的问题．审题发现，只须从已知条件给出的两个等式中消去θ，就能得到问题的结论．上面我们就是用消去法解本题的．用这种方法解题时，要注意代数、三角知识的灵活运用和等式变形、恒等变形的技能技巧．

例十　（同例七）（图四）



（图四）

证明：取AB所在的直线为x轴，AB的中点为原点，建立直角坐标系．设A、B的坐标分别为$\left(-\frac{c}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{c}{2},0\right)$．$|BC|=a$，$|AC|=b$，$\angle BAC=\alpha$，$\angle ABC=\beta$．则$BE$所在直线的方程是

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{2}+t\cos(90^\circ-\beta)=\dfrac{c}{2}+t\sin\beta \qquad (t\text{是参数}) \\ y=t\sin(90^\circ-\beta)=t\cos\beta \end{cases}$$

$\because$ $|BE|=a$

$\therefore$ E点的坐标为$\begin{cases} x_1=\dfrac{c}{2}+a\sin\beta \\ y_1=a\cos\beta \end{cases}$

同理，D点的坐标为$\begin{cases} x_2=-\dfrac{c}{2}-b\sin\alpha \\ y_2=b\cos\alpha \end{cases}$

$\therefore$ DE的中点M的坐标为

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{2}+a\sin\beta-\dfrac{c}{2}-b\sin\alpha\right) \\ \qquad\qquad\qquad\quad =\dfrac{1}{2}(a\sin\beta-b\sin\alpha) \\ y_3=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)=\dfrac{1}{2}(a\cos\beta+b\cos\alpha) \end{cases}$$

在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$

$\therefore$ $a\sin\beta-b\sin\alpha=0$．

由射影定理，得 $a\cos\beta+b\cos\alpha=c$

$\therefore$ M点的坐标为$\left(0,\ \dfrac{c}{2}\right)$，这是一定点．