高等院校核心课程导学

线性代数导学

姚泽清 主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等院校核心课程导学

线性代数导学

主编 姚泽清

编写 汪泽焱 郭 艳
赵 华 刘守生

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书以全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲为基准，并参照同济大学应用数学系编《线性代数》教材(第四版)的章节顺序编写而成。全书分为三大部分：第一部分是内容综述，介绍各章所涉及的基本概念、基本性质和基本方法；第二部分是典型例题，对1987年以来的数学一、数学二、数学三和数学四考研真题进行了全面解析；第三部分是同步练习，精选了各级各类考试中的常见题型供读者作习题之用。本书将纷繁复杂的线性代数概念、理论和方法用一条清晰的脉络显现出来，将经典的线性代数解题思路全方位地展现在学生面前，使学生能够得到有效的逻辑思维方式的训练，以缩短学习和复习的进程，提高学习效率。此外，书后还列有100道快速自测题，供读者强化训练之用。书中所有习题均配有解答。

本书可作为线性代数的教学参考书和考研辅导书供各级各类高等院校的学生使用，也适用于参加全国高等教育自学考试的朋友们。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数导学／姚泽清主编．—北京：国防工业出版社，2005.8

高等院校核心课程导学

ISBN 7-118-03917-9

Ⅰ．线…　Ⅱ．姚…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第055079号

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码　100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 13¾　317千字

2005年8月第1版　2005年8月北京第1次印刷

印数：1—4000册　定价：22.00元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

线性代数是代数学中处理线性关系问题的一个重要的基础分支，而很多实际问题的处理，最后又往往归结为线性问题，因此，它在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用。线性代数作为一个独立的数学分支虽然在20世纪才形成，然而它的历史却非常久远，例如最古老的线性问题——线性方程组的解法，在中国古代的数学著作《九章算术》中就已经有了比较完整的叙述，其中所述方法本质上就是现代的对方程组的增广矩阵施行初等行变换的方法。在18世纪~19世纪期间产生的行列式和矩阵的概念，为处理线性问题提供了有力的工具；而向量概念的引入，使得向量空间及其线性变换，以及与此相联系的矩阵理论，构成了线性代数的中心内容。目前，线性代数的理论和方法已经渗透到社会生活的许多方面，因此，线性代数不仅仅是高等院校中的一门数学基础课程，也不仅仅是工学、经济学和管理学等专业硕士研究生入学考试数学试卷中的一个必考科目，而且是现代人知识结构中不可或缺的一个重要组成部分。

然而，由于线性代数理论上的抽象性、概念上的多样性和推理上的逻辑性，使得不少人的学习过程步履维艰。如何将纷繁复杂的线性代数概念、理论和方法用一条清晰的脉络显现出来，将经典的线性代数解题思路全方位地展现在学生面前，使学生能够得到有效的抽象思维方式的训练，以缩短学习和复习的进程，提高学习效率，使代数不再难学，正是本书试图解决的一个问题。

本书以《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》为基准，结合线性代数课程教学基本要求和全国高等教育自学考试数学课程的考试要求，并参照同济大学应用数学系编《线性代数》教材(第四版)的章节顺序编写而成。全书共分5章，每章又分为三大部分：第一部分是“内容综述”，分类介绍各章内容所涉及的基本概念、基本性质和基本方法，使读者对本章的知识体系有一个清晰的把握；第二部分是“典型例题”，对1987年以来的数学一、数学二、数学三和数学四考研真题分门别类地进行了全面解析，并用题前分析的方式对解题思路进行了剖析，用题外话的方式对解题过程中的出彩点和易出错的地方进行了点评；第三部分是“同步练习”，精选了各级各类考试中的常见题型供读者作习题之用。此外，我们将全国硕士研究生入学统一考试和全国高等教育自学考试中出现的100道选择题和填空题作为“快速自测题”列在书后，供读者考前复习之用；最后，我们还将容易混淆的矩阵的3种等价关系以及4种特殊矩阵的性质作为附录进行了列表比较，并给出了所有习题的答案。

本书可作为线性代数的教学参考书和考研辅导书供各级各类高等院校的学生使用，也适用于参加全国高等教育自学考试的朋友们。

本书的第一章、第二章由郭艳同志执笔编写，第三章、第四章由赵华同志执笔编写，第五章由汪泽焱同志执笔编写，姚泽清、刘守生负责其余部分的编写以及全书的总撰定稿工作。本书的编写工作得到了解放军理工大学理学院苏晓冰院长、数理系张寿虎政委、苏兆龙教授、滕加俊副教授、田作威副教授的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢，并借此机会向所有曾经给予我们帮助的朋友们表示诚挚的敬意！

由于时间和水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请各位专家和读者批评指正，信寄：yzqnj@yahoo.com.cn

姚泽清

2005年1月于南京

目　　录

第一章　行列式

一、内容综述

(一) 基本概念

1. 全排列及其逆序数

(1) 全排列:把 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的一个全排列,简称排列。

(2) 逆序:在一个排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同,就构成一个逆序。对自然数列,通常以由小到大为标准次序。

(3) 逆序数:一个排列中所有逆序的总数,称为这个排列的逆序数。逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列。

2. n 阶行列式

(1) 形式:由 n^2 个数排列而成的一个 n 行 n 列的数表,两边界以竖线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

就形成了一个 n 阶行列式。

(2) 数值:n 阶行列式中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$是列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数,就构成了这个 n 阶行列式的值。

3. 余子式与代数余子式

(1) 余子式:在 n 阶行列式中,将 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后所得到的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij}。

(2) 代数余子式:若 M_{ij}为 a_{ij}的余子式,则称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 a_{ij}的代数余子式。

(二) 基本性质

1. 排列的性质

(1) 一个排列中的任意两个元素对换,改变排列的奇偶性;

(2) 任一排列可经一系列对换变成标准排列,且奇排列所需的对换次数为奇数,偶排列所需的对换次数为偶数;

(3) 在 n 阶排列中,不同排列的种数为 $n!$ 个,且当 $n\geqslant 2$ 时奇偶排列各占一半。

2. 行列式的性质

(1) 行列互换,行列式不变:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 将行列式的一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式不变;

(3) 两行(列)互换,行列式变号;

(4) 两行(列)成比例,行列式为 0;

(5) 行列式的一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为 0:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \qquad (i \neq j)$$

(6) 若行列式的一行(列)有公因子 k,则 k 可提到行列式外:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(7) 若行列式的一行(列)可分解为两组数之和,则行列式可分解为两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 几个特殊行列式的值

(1) 对角行列式:在主对角线两侧的元素都为 0 的行列式,称为对角行列式,对于对角行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【注】对于在副对角线两侧的元素都为 0 的行列式,有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2) 上(下)三角行列式:在主对角线下侧(上侧)的元素为 0 的行列式,称为上(下)三角行列式,对于三角行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【注】对于在副对角线一侧的元素为 0 的行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 反对称行列式:满足

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

的行列式,称为反对称行列式,对于奇数阶反对称行列式,有

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (n \text{ 为奇数})$$

【注】对于偶数阶反对称行列式无此结论!

(4) 范德蒙行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

【注】范德蒙行列式 $D_n = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相等。

4. 克莱姆法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中的第j列元素用方程组右端的常数项

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

代替后所得的行列式。

【注】当 $n>3$ 时,按克莱姆法则求方程组的解由于计算量太大而没有多少实用价值,因此该法则的主要意义在理论上。

(三) 基本方法

1. 行列式的计算

(1) 利用对角线法则:只适用于 2 阶和 3 阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(2) 利用行列式的定义:只适用于一些特殊结构或零元素特别多的行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \cdots a_{n_{j_n}} =$$

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

(3) 利用行列式的性质:对行列式进行初等变换,将行列式化为上(下)三角行列式,进而得出结果。行列式的初等变换包括:

① 两行或两列互换,此时行列式要变号;

② 一行或一列乘以数 $k \neq 0$,此时行列式要除以 k;

③ 一行或一列加上另一行或另一列的 k 倍,此时行列式不变。

(4) 利用行列式的展开:利用行列式的按一行或一列的展开,可达到下列目的:

① 降阶(适用于一行或一列只有一两个非零元素的行列式);

② 递推(适用于降阶后的行列式与原行列式具有相同形式的行列式)。

(5) 利用范德蒙行列式:适用于含有递增的方幂的行列式。

(6) 利用加边法:适用于除对角线上的元素外,各行(列)对应成比例的行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & k_1 a_2 & \cdots & k_1 a_n \\ k_2 a_1 & x_2 & \cdots & k_2 a_n \\ k_3 a_1 & k_3 a_2 & \cdots & k_3 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n a_1 & k_n a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

其具体步骤为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & k_1 a_2 & \cdots & k_1 a_n \\ 0 & k_2 a_1 & x_2 & \cdots & k_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & k_n a_1 & k_n a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -k_1 & x_1 - k_1 a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & x_2 - k_2 a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_n & 0 & 0 & \cdots & x_n - k_n a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i a_i}{x_i - k_i a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & x_1 - k_1 a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & 0 & x_2 - k_2 a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_n & 0 & 0 & \cdots & x_n - k_n a_n \end{vmatrix} =$$

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i a_i}{x_i - k_i a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - k_i a_i)$$

(7) 利用行列式的分块:

① 若 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵(m 行 m 列),$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵(n 行 n 列),$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

② 若 $A_1, A_2, \cdots, A_S$ 均为方阵(不要求同阶),则

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_S \end{vmatrix} = |A_1||A_2|\cdots|A_S|$$

2. 行列式按行(列)的展开

(1) 行列式按一行展开,行列式的值等于该行的各元素与其代数余子式乘积之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

(2) 行列式按一列展开,行列式的值等于该列的各元素与其代数余子式乘积之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

3. n 个未知数 n 个方程的线性方程组解的判定

(1) 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

有惟一解的充分必要条件是它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

(2) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

二、典型例题

(一) 行列式的计算

例 1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ ________。

(1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题)

【解】注意到行列式各行之和均相同,将行列式的后 3 列都加到第 1 列,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

再将后式的第 1 列和第 4 列、第 2 列和第 3 列互换,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\times(-1)^3=-3$$

【题外话】4 阶及 4 阶以上行列式没有对角线法则,故通常都利用行列式的性质将行列式化为三角行列式来加以计算。

例 2 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=$ ________。

(1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题)

【解】将行列式按第 1 列展开,并注意到展开后所得到的两个行列式分别是 $n-1$ 阶的上三角行列式和下三角行列式,就有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

例 3 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

（1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题）

【解】应选(D)。

解法 1:利用行列式的展开。按第 1 行展开行列式,得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$$

解法 2:利用行列式的分块。先将行列式的第 4 列经两次互换移至第 2 列,再将第 4 行经两次互换移至第 2 行,得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$$

例 4 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=$______。

（1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题）

【解】记 $D=D_5$，将行列式的后 4 列都加到第 1 列，再将行列式按第 1 列展开，得

$$D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}+(-1)^6(-a)\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\end{vmatrix}=$$

$$D_4+(-1)^5a^5$$

同理可得

$$D_4=D_3+(-1)^4a^4$$

$$D_3=D_2+(-1)^3a^3$$

而

$$D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)^2+a=1-a+a^2$$

以上 4 式相加，有

$$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$$

例 5 记行列式

$$\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$$

为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题）

【解】应选(B)。将行列式的第 1 列的 -1 倍加到其余各列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1)$$

故方程 $f(x)=0$ 有两个实根 $x=0$ 与 $x=1$。

(二) 行列式的性质

例 6 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量,且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2|=n$,则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于

(A) $m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $n-m$　　(D) $m-n$

(1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题)

【解】应选(B)。第 1 列与第 3 列互换,有

$$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$$

再由行列式的性质,得

$$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=-(|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2|)=-(m+n)$$

例 7 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

则第 4 行各元素余子式之和的值为________。

(2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题)

【分析】由行列式按一行展开法则,有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=(-1)A_{41}+A_{42}+(-1)A_{43}+A_{44}=$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

故可直接计算该 4 阶行列式。

【解】所求即

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-28$$

例 8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$________。

（2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题）

【解】反复利用一列减去另一列的若干倍，有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|=\\&|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3|=\\&2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2\end{aligned}$$

（三）克莱姆法则

例 9 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

只有零解，则 λ 应满足的条件是________。

（1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题）

【解】由克莱姆法则，只有当系数行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq 0$$

时，原方程组才有惟一零解，故应填 $\lambda\neq 1$。

例 10 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是________。

（1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题）

【解】方程组的系数行列式

$$D=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\1&a_3&a_3^2&\cdots&a_3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$