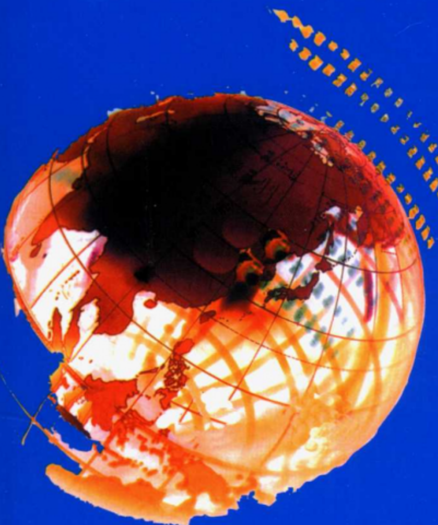
高一年级

总主编 单墫 熊斌

奥数教程



熊斌 冯志刚 李兴怀 编著

华东师范大学出版社

ISBN 7-5617-2365-2

9 787561 723654 01>

定价：15.00元

总主编 单墫 熊斌

奥数教程

（第三版）

·高一年级·

熊斌 冯志刚 李兴怀 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程．高一年级／熊斌等编著．—上海：华东师范大学出版社，2000.11

ISBN 7-5617-2365-2

Ⅰ．奥...　Ⅱ．熊...　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第48988号

奥数教程 ·高一年级·
(第三版)

总主编　单墫　熊斌
编　著　熊斌　冯志刚　李兴怀
策划组稿　倪明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　刘爱晶
封面设计　高山
版式设计　蒋克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
华东　中南地区 021-62458734
华北　东北地区 021-62571961
西南　西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　址　上海市中山北路3663号
邮编 200062

印刷者　江苏扬中市印刷有限公司
开　本　890×1240　32开
印　张　12
字　数　358千字
版　次　2006年1月第3版
印　次　2006年1月第16次
书　号　ISBN 7-5617-2365-2/G·1106
定　价　15.00元

出版人　朱杰人

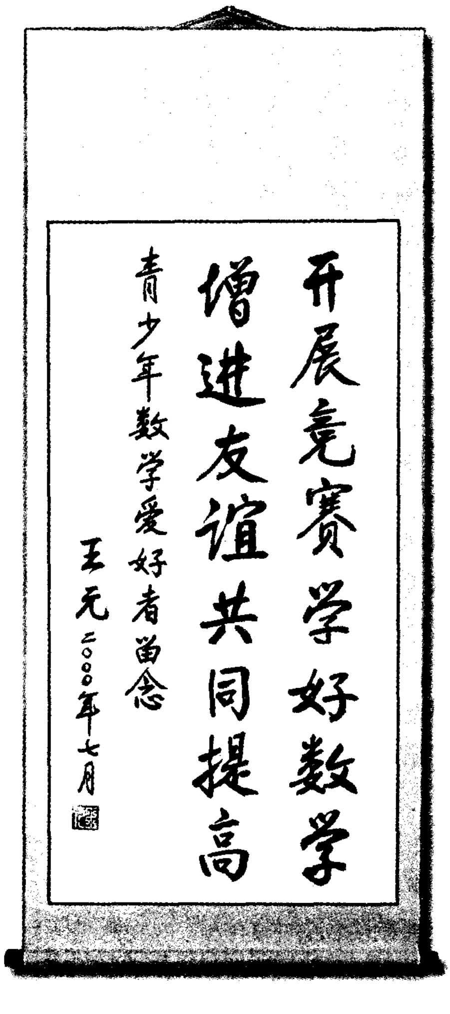
熊 斌　华东师范大学数学系硕士生导师，中国数学奥林匹克高级教练，中国数学奥林匹克委员会委员，2005年 IMO 中国国家队领队，《数学通讯》数学竞赛专栏主持人，《数理天地》编委、记者．多次担任中国数学奥林匹克国家集训队教练，指导了多名学生在IMO中获得了金牌．多次参与全国初中数学竞赛、希望杯全国数学邀请赛、中国数学奥林匹克的命题工作，在国内外杂志上发表论文50多篇，编著、翻译、主编著作100余本．

冯志刚　上海市上海中学教学处副主任，特级教师．2003年中国数学奥林匹克国家队副领队．长期从事数学奥林匹克教学和研究工作，所教学生中，累计有2人获 IMO 金牌，30多人次获得参加IMO、国家集训队和CMO数学竞赛的资格，200多人次获上海市数学竞赛一等奖．发表论文10多篇，参与了多套数学竞赛方面著作的编写工作．

本 书 荣 获
第十届全国教育图书展
优秀畅销图书奖

《奥数教程》编委会

顾　问　王　元
主　编　单　墫　熊　斌
编　委　（按姓氏笔画为序）
冯志刚　刘诗雄
江兴代　余红兵
单　墫　杭顺清
胡大同　赵雄辉
倪　明　葛　军
熊　斌



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

致读者

《奥数教程》自2000年出版以来,深受广大读者的欢迎和好评,不少读者还特意来信表示他们对这套书的推崇和喜爱.2001年,这套图书荣获了第十届全国教育图书展的优秀畅销书奖.不久,香港现代教育研究社又出版了她的繁体字版和网络版,并很快成为香港的畅销图书之一.这里,我们衷心地感谢广大读者朋友对《奥数教程》的厚爱.

2003年6月,我们对这套图书作了修订,并开展了"有奖订正"和"巧解共享"两项活动,得到了更多的读者的支持与配合,不少读者纷纷来信、来电提出订正意见和更好的解法.第二版出版两年多来依然畅销,据北京开卷图书市场研究所的监控销售数据,《奥数教程》名列同类书前茅,尤其是初一和高一分册分别获得数学竞赛图书初中段和高中段的第一.

为了使《奥数教程》更健康、更成熟地发展,为了使学生的学习生活更主动、更有效,配合课程改革,我们对《奥数教程》进一步修订,并继续开展下列活动,希望更多的读者朋友乐于参与.

一、有奖订正

从2006年1月起,到2006年12月间,欢迎读者朋友对2006年出版的《奥数教程》(12册),提出改正意见,我们将对"纠错能手"给予奖励.

二、巧解共享

欢迎读者朋友对《奥数教程》中例题与习题,提供更巧妙的解法.我们将选择有新意的、合适的解法在网上公布,以与其他读者朋友共享.凡在修订时被采用者,我们将署上提供者的姓名,并支付相应的稿酬.

我们衷心祝愿《奥数教程》永远成为您的好朋友.

华东师范大学出版社

2005年11月

前言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”．但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好．的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属．

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势．

中国人能用一只手表示1～10，而很多国家非用两只手不可．

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有12进制，60进制的残余)．

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”．但外国人，一学乘法，头就大了．不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵．

圆周率$\pi = 3.14159\cdots$．背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了．可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背π先背诗，我们看来简直自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法．

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色．从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生学习兴趣，启迪学生智慧．例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解．中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成9个小和尚，100个馒头表明小和尚是300个，多出200个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出8个，从而$200 \div 8 = 25$即是大和尚人数．小和尚自然是75人，或将一个大和尚与3个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头．恰好与总体的平均数相等．所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是$100 \div (3+1) = 25$人．

中国人善于计算,尤其善于心算.古代还有人会用手指计算(所谓"掐指一算").同时,中国很早就有计算的器械,如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中,我国的优势显然,所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理,在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算,我国有不少论著),比希腊人稍逊一筹.但是,中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平,在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班,他们认为所教的几何内容太深,学生不可能接受,但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来,中国队已经获得了11次团体冠军.成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说"今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一.……去年也是第一名."(陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演"怎样把中国建为数学大国")

陈省身先生还预言:"中国将在21世纪成为数学大国."

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:(1)进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

"天下大事,必作于细."我们希望,而且相信,这套丛书的出版,在使我国成为数学大国的努力中,能起到一点作用.本丛书初版于2000年,2003年修订过一次,现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问,并为青少年数学爱好者题词,我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生,没有他们,这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2005年11月

目　录

基础篇

第1讲

集合的概念与运算

一、知识要点和基本方法

集合是数学中最重要的概念之一，是现代数学的基础. 集合是一个不加定义的原始概念. 一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合. 集合中的每一个对象叫做这个集合的元素. 对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、无异的、无序的.

正确地表达一个集合是学好数学的基础. 描述法是表示集合的重要方法，它基于下面的概括原则：

概括原则 任给一个性质 p，那么存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 p 的所有对象，即

$$S = \{x \mid p(x)\},$$

其中 $p(x)$是“x 具有性质 p”的缩写.

两个集合之间的关系可以通过子集、交集、并集来反映. 处理问题时，往往需要从元素出发来讨论，这里蕴含了“从局部到整体”的数学思想.

在集合的运算中，除了交与并两种运算外，经常出现的还有补运算与差运算.

由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 **A 关于 B 的差集**，记作 $A\backslash B$(也记作 $A-B$)，即

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A, 但\ x \notin B\}.$$

集合的各种运算之间成立如下一些关系式.

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

De Morgen 法则：

$$\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B),$$

$$\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B).$$

二、范例解析

例1 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x = m, y = -3m + 2, m \in \mathbf{N}^*\}$，$B = \{(x, y) \mid x = n, y = a(n^2 - n + 1), n \in \mathbf{N}^*\}$. 若 $A \cap B \neq \varnothing$，求整数 a 的值.

解 由题意知，方程组

$$\begin{cases} y = -3x + 2, \\ y = ax^2 - ax + a \end{cases}$$

有整数解 (x, y)，$x > 0$.

显然 $a \neq 0$，$y < 0$，从而 $a < 0$. 消去 y，得

$$ax^2 - (a - 3)x + a - 2 = 0,$$

$$\Delta = (a - 3)^2 - 4a(a - 2) = -3a^2 + 2a + 9 \geqslant 0,$$

即

$$3a^2 - 2a \leqslant 9,$$

由于 a 是负整数，所以 a 只能为 -1.

当 $a = -1$ 时，$A \cap B = \{(1, -1), (3, -7)\}$.

故 $a = -1$.

例2 设 A 是两个整数平方和的集合，即

$$A = \{x \mid x = m^2 + n^2, m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

(1) 证明：若 $s, t \in A$，则 $st \in A$；

(2) 证明：若 $s, t \in A$，$t \neq 0$，则 $\frac{s}{t} = p^2 + q^2$，其中 p, q 是有理数.

分析 欲证 $st \in A$，只需证明 st 具有集合的性质即可，即证 st 可以表示为两个整数的平方和.

证 (1) 由 $s, t \in A$，可设

$$s = m_1^2 + n_1^2,\ t = m_2^2 + n_2^2,$$

其中 m_1、m_2、n_1、n_2 都是整数，于是

$$\begin{aligned} st &= (m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) \\ &= m_1^2 m_2^2 + n_1^2 n_2^2 + m_1^2 n_2^2 + m_2^2 n_1^2 \\ &= (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2, \end{aligned}$$

即 st 是两个整数的平方和，从而 $st \in A$.

(2) 由于 $s, t \in A$，由(1)知，$st \in A$，于是可设 $st = m^2 + n^2$，其中 m、n 都是整数.

对于 $t \neq 0$，有

$$\frac{s}{t} = \frac{st}{t^2} = \frac{m^2 + n^2}{t^2} = \left(\frac{m}{t}\right)^2 + \left(\frac{n}{t}\right)^2,$$

而 $\frac{m}{t}$、$\frac{n}{t}$ 均为有理数，从而命题得证.

设函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$，集合 $A = \{x \mid x = f(x), x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid x = f(f(x)), x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 证明：$A \subseteq B$；

(2) 当 $A = \{-1, 3\}$ 时，求集合 B.

解 (1) 对任意的 $x_0 \in A$，知 $x_0 = f(x_0)$，$x_0 \in \mathbf{R}$，于是

$$x_0 = f(x_0) = f(f(x_0)),$$

故 $x_0 \in B$，从而 $A \subseteq B$.

(2) 因为 $A = \{-1, 3\}$，所以 $-1 = f(-1)$，$3 = f(3)$，即

$$\begin{cases} (-1)^2 + a(-1) + b = -1, \\ 3^2 + a \cdot 3 + b = 3, \end{cases}$$

解得 $a = -1$，$b = -3$.

所以，$f(x) = x^2 - x - 3$. 由 $x = f(f(x))$，得

$$x = (x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3,$$

即 $$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0.$$

由(1)知，$A\subseteq B$，故 $-1, 3\in B$，从而 -1 和 3 是上述方程的根，即方程左端含有因式 $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$，于是因式分解可将上述方程化为

$$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0,$$

解得 $x=-1, 3, \pm\sqrt{3}$. 所以，$B=\{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

例4 集合 A、B、C(不必相异)的并集

$$A\cup B\cup C=\{1, 2, \cdots, 10\}.$$

求满足条件的集合的有序三元组 (A, B, C) 的个数.

解 由文氏图，可知在求 $A\cup B\cup C$ 时，A、B、C 之间可交出 7 个区域(如图 1-1 所示). 从而 1, 2, …, 10 中每个数有 7 种选择，故所求有序三元组的个数为 7^{10}.

说明 这里每个数 1, 2, …, 10 均有 7 种选择，用到了“A、B、C 不必相异”，以及“(A, B, C) 为有序三元组”两个条件. 当然，从解法上来看，我们体会了文氏图的一个妙用.

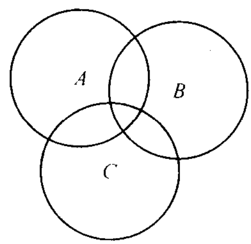


图 1-1

例5 设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 15$，集合 A、B 都是 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集，$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$. 证明：集合 A 或者 B 中，必有两个不同的数，它们的和为完全平方数.

证明 由 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=I$，我们不妨设 $1\in A$，并采用反证法来处理.

设集合 A 与 B 中，都没有两个数，它们的和为完全平方数. 则 $3\in B$，于是 $6\in A$，$10\in B$. 这时，如果 $15\in B$，则 $10+15=25$ 为完全平方数，若 $15\in A$，则 $1+15$ 又是一个完全平方数，从而 15 没有归属，由 $n\geqslant 15$，这是一个矛盾.

所以，命题成立.

说明 这里“我们不妨设 $1\in A$”是应该把握的一种技巧，人为地作合理的假设在处理具有对称性的问题时，可使问题简化.

例 6 设集合 A 的元素都是正整数，满足如下条件：

(1) A 的元素个数不小于 3；

(2) 若 $a \in A$，则 a 的所有因数都属于 A；

(3) 若 $a \in A$，$b \in A$，$1 < a < b$，则 $1 + ab \in A$.

请解答下面的问题：

(1) 证明：1、2、3、4、5 都是集合 A 的元素；

(2) 问：2 005 是否是集合 A 的元素？

解 (1) 首先，易知 $1 \in A$.

设 $a \in A$，$b \in A$，$1 < a < b$. 若 a、b 中至少有一个偶数，则 $2 \in A$；若 a、b 都为奇数，则 $1 + ab \in A$，而 $1 + ab$ 是偶数，故 $2 \in A$.

设 1、2、$a \in A(a > 2)$，则

$$1 + 2a \in A,\ 1 + 2(1 + 2a) = 3 + 4a \in A,$$

$$1 + (1 + 2a)(3 + 4a) = 4 + 10a + 8a^2 \in A.$$

若 a 是偶数，则 $4 \mid (4 + 10a + 8a^2)$，于是 $4 \in A$；若 a 是奇数，则把 $4 + 10a + 8a^2$ 作为 a，重复上面的过程可得 $4 \in A$.

又 $1 + 2 \times 4 = 9 \in A$，所以 $3 \in A$，$1 + 2 \times 3 = 7 \in A$，$1 + 2 \times 7 = 15 \in A$，所以 $5 \in A$.

所以，1、2、3、4、5 都是集合 A 的元素.

(2) 2 005 是集合 A 的元素. 因为 $1 + 3 \times 5 = 16$，故 $8 \in A$，进而

$$1 + 4 \times 8 = 33,\ 1 + 3 \times 33 = 100,$$

$$1 + 5 \times 100 = 501,\ 1 + 4 \times 501 = 2\,005$$

都是集合 A 的元素.

说明 其实，可以证明：$A = \mathbf{N}^*$.

由(1)知，1、2、3、4、5 都是集合 A 的元素. 假设 $1, 2, \cdots, n \in A(n \geqslant 5)$，下证 $n + 1 \in A$.

如果 $n + 1 = 2k + 1$ 为奇数，那么 $3 \leqslant k < n$，于是 $n + 1 = 1 + 2k \in A$；

如果 $n + 1 = 2k$ 是偶数，那么 $3 \leqslant k < n$，于是 $n = 2k - 1 \in A$，$1 + 2k \in A$，所以 $1 + (2k - 1)(2k + 1) = 4k^2 \in A$，从而 $2k \in A$，即