中学理科学习指导丛书

高二
解析几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

中学理科学习指导丛书

高二解析几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

一九八三年·重庆

编　者

北京市一二三中学　杨弘敏
北京市第四十七中学　王健民
北京清华大学附属中学　孔令颐
北京师院附属中学　戴汝潜
北京海淀区教师进修学校　张士充
赵大悌

高二解析几何辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
四川人民出版社重印
四川省新华书店发行
七二三四工厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.125 字数 150千
1983年7月 第一版 1983年 7月 成都第一次印刷
印数：1—285,000册

书号：7114·141　定价：0.51元

前　言

长期以来，我们感到：学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这个问题，我们组织了一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过教学实践，我们认识到：

（1）只有把知识的结构分析清楚时，知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体。

（2）打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一。

（3）引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识提高解题能力的有效途径。

（4）对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引伸的能力，这不但是可以的，而且是应该的。

（5）知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几个部分：

（1） 结构分析，有些章分析的较简单，可以在学习开始时看，有些则分析得较深入，可以在学完全章后再看。

（2） 重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们贯通全章内容。说明难点之所以困难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法，解题技巧，和促进哪些能力的增长。

（3） 各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

（4） 启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲的思路、观点、方法等。以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

（5） 自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全、并具有一定综合性，用以检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

本书尽量作到以上各项中的要求；体现紧密配合教材，但又不重复教材内容的原则，但是限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给以批评和指正。

北京市海淀区教师进修学校

1983年2月

内 容 提 要

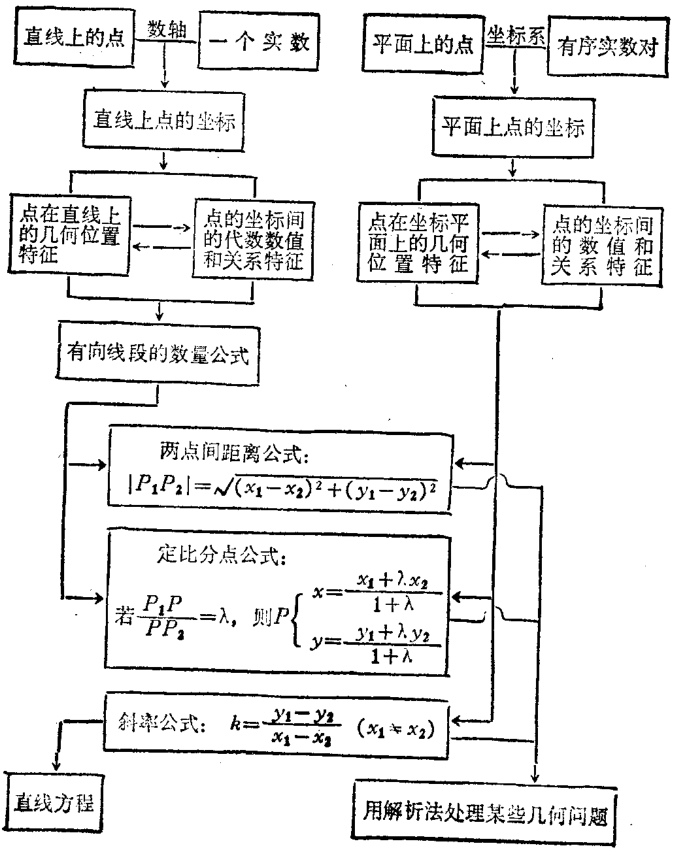
本册是配合高二解析几何教材编写的．书中对每一章的知识结构进行了分析，对重点、难点进行了较详细的讲解，对习题进行了归类，并注意介绍数学中的方法和规律．对学生来说，它是一位不说话的数学辅导员．书中还配备了一定量的典型例题和习题，每章都附有一份自我检查题．因此，本书又为学生对所学数学知识的练习和检查提供了材料．

目　　录

第一章 直 线

一、结 构 分 析

1. 内容结构图



- 直线方程的四种特殊形式
  - 点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$
  - 斜截式：$y=kx+b$
  - 两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$
  - 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
- 与坐标轴平行的直线方程
  - 平行于x轴的直线：$y=b$
  - 平行于y轴的直线：$x=a$

↓

直线方程一般形式 $AX+By+C=0$ $(A\cdot B\neq 0)$

$K=-\dfrac{A}{B}$，　$b=-\dfrac{C}{B}$ $(B\neq 0)$

- 点与直线位置关系 (X_0, Y_0) $AX+By+C=0$
  - 点在直线上：$AX_0+By_0+C=0$
  - 点在直线外：$d=\dfrac{|AX_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- 两条直线位置关系 $L_1: A_1X+B_1y+C_1=0$ $L_2: A_2X+B_2y+C_2=0$
  - 平行
    - $K_1=K_2$
    - 同时垂直于 X 轴
  - 相交
    - 斜交：$\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$
    - 垂直：$k_1=-\dfrac{1}{k_2}$
    - → 求交点 $\begin{cases}A_1X+B_1y+C_1=0\\A_2X+B_2y+C_2=0\end{cases}$
- 直线系：具有某些共性的直线

直线公式图

2. 说明

(1) 平面直角坐标系中点的坐标概念是解析几何中最基础的内容，也是研究解析几何的最基本概念。由于坐标系的建立，使平面上的点和一个有序实数对之间建立了一一对应关系，这是形与数相互联系、相互转化的基础和出发点。把形和数结合起来，使我们可以用代数方法来研究几何图形的性质。

(2) 有向线段是一维空间(直线上)的解析几何问题。主要是引进有向线段的概念、直线上点的坐标、计算有向线段的数量公式。这样，数轴上的和平行于数轴的有向线段的数量和长度就可通过端点的坐标表示。为在二维空间中推导平面直角坐标系下两点间距离公式和定比分点公式作了准备。

(3) 平面直角坐标系下点的坐标概念使平面上的点和有序实数对联系起来，并在此基础上进行几何形式与代数关系之间的相互转化。我们必须掌握用数值关系说明几何关系；反之，又要学会从几何关系考察数值关系。

(4) "直线的方程"是直线上所有点的坐标应满足的等量关系，它数量地反映了直线上所有点的坐标的共同特征。在课本中，是首先从确定直线的两个最基本的条件来确定直线的方程。这两个最基本条件是：通过两点确定一条直线；通过一定点依一定方向确定一条直线。为了能迅速而准确地写出直线方程和各种应用，我们必须学会根据多种不同类型的两个独立的条件来建立各种不同形式的直线方程，这样可得出直线方程的四种特殊形式；同时为了理论和某些应用的需要，还得研究直线方程的一般形式。通过两个定理："平面内任何一条直线的方程都是关于 x、y 的一次方程"，"任

何一个关于 x 和 y 的一次方程都表示一条直线”，这便得出直线方程的一般形式：

$$Ax+By+C=0 \qquad (A\cdot B\neq 0).$$

任何一个特殊形式的直线方程都可化到一般形式，反之一般形式也可化到各种特殊形式。这种转化的积极意义在于：将一般形式的直线方程转化为特殊形式，可以明了直线的某些特征量，如转化为斜截式，立刻可求得直线的斜率及它在 y 轴上的截距；转化为截距式则便于作图；将特殊形式转化为一般形式则便于将直线与二元一次方程进行联系，可以从理论上概括而深入地进行形和数关系的研究；这种转化的练习，还将有助于从特殊到一般，从一般到特殊的思维训练。

(5) 在建立了直线方程后，可将直线的几何性质的讨论归结于相应的代数问题的研究。例如：点在（否）直线上↔点的坐标适合（否）方程；两直线的交点↔二元一次方程组的解；两直线平行↔斜率 $k_1=k_2$，等等。这些联系将使我们初步体会到解析几何的“形数结合”的研究方法。

二、重点、难点分析

1. 有向线段。

一条直线有两个相反的方向，我们用箭头表示其中的一个，并且把它称为正方向，那么相反的方向就是负方向。象这样规定了方向的直线叫做有向直线。我们过去所学过的数轴、平面直角坐标系中的横轴、纵轴都是有向直线。

在平面几何中所讲的线段与解析几何中的有向线段是不同的。平面几何中的线段是不论方向的，AB与BA可代表同一条线段；解析几何中有向线段$\overline{AB}$表示A为起点、B为终点的线段。而有向线段$\overline{BA}$的起点与终点同$\overline{AB}$恰好相反。它们表示两条不同的线段。

要决定一条有向线段的方向是正或负，需要看这条线段的方向和它所在有向直线的方向是不是一致。如果一致，那末它就有正方向；如果相反，那末它就有负方向。

一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号叫做这条有向线段的数量。在数轴上有两点A、B，它们的坐标分别是x_1和x_2，则有向线段$\overline{AB}$的数量为

$$\overline{AB}=x_2-x_1,$$

即$\overline{AB}$的数量等于终点坐标与起点坐标之差。而有向线段$\overline{AB}$的长度为其数量的绝对值，$|\overline{AB}|=|x_2-x_1|$。显然，$\overline{AB}=-\overline{BA}$，$|\overline{AB}|=|\overline{BA}|$。

在学习过程中，要分清有向线段、有向线段的数量、有向线段的长度这三者之间的区别与联系。

有向线段的数量公式也是本章的重点，它是为后面证明几个基本公式作准备的。如果不先弄清这个概念，那末在后面证明几个基本公式时，就要把坐标分成四个象限一一进行论证，显得很繁琐，而利用有向线段的概念，就可使论证大大简化。

2. 两点间的距离公式。

两点间的距离公式是用坐标法研究几何图形的基本公式，也是在推导圆锥曲线方程的过程中必不可少的工具。

这个公式是根据有向线段的数量公式和平面几何中的勾

股定理来证明的。而且不论在哪个象限都是成立的。因此在记忆公式时，可以假定图形在第一象限，借助于勾股定理把公式 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 记住。

我们不但要了解两点间距离公式的一般形式，还要了解它的特殊情况：

(1) 当 P_1P_2 平行于 x 轴时，$y_1=y_2$。于是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|.$$

(2) 当 P_1P_2 平行于 y 轴时，$x_1=x_2$，于是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=|y_1-y_2|.$$

(3) 当 P_2 点与原点重合时，$|P_1P_2|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$。就是说，一点与原点的距离是这点的"坐标的平方和的算术平方根"。

从两点间距离公式 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 的形式看，在 x_1、x_2、y_1、y_2 及 $|P_1P_2|$ 这五个量中只要知道其中四个量，就可利用该公式求出第五个量；不限于已知端点坐标，求线段的长度。

例1．求 $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 和 $B(\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha)$ 两点间的距离。

解：
$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(\cos 2\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin 2\alpha-\sin\alpha)^2}\\&=\sqrt{2-2(\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha)}\\&=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\\&=2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\\&=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.\end{aligned}$$

例2．已知点 $A(1,\ 5)$ 和 $B(x,\ 2)$ 的距离为 5，求 B 点坐

标。

解：∵ $|AB|=\sqrt{(x-1)^2+(2-5)^2}=5$

∴ $(x-1)^2=16$，得 $x_1=5$，$x_2=-3$。

故 B 点坐标为 $(5, 2)$ 或 $(-3, 2)$。

例 3．求证：矩形对角线相等。

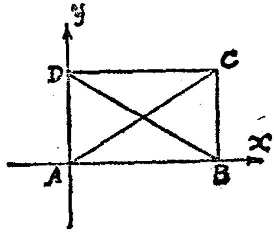


图 1-1

证明：取矩形两邻边所在直线为坐标轴，建立坐标系（如图1—1），设 $|AB|=a$，$|AD|=b$，则矩形四个顶点是：$A(0, 0)$ $B(a, 0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$。

∵ $|AC|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$|BD|=\sqrt{(a-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，

∴ $|AC|=|BD|$，

故矩形对角线相等。

3．定比分点公式．

线段的定比分点公式及其特例中点公式都很重要，它是本章的重点也是难点，在学习过程中，要弄清以下几个问题。

(1) 什么叫做 p 点分有向线段 $\overline{p_1p_2}$ 的比。

P 点分有向线段 p_1p_2 的比为 λ，即 $\lambda=\dfrac{\overline{p_1p}}{\overline{pp_2}}$。在学习过程中往往把两条有向线段的数量之比和两条线段的长度之比混淆起来。要注意 $\dfrac{\overline{p_1p}}{pp_2}$ 不是线段长度的比，也不是有向线段的比，而是有向线段数量的比。

(2) 在$\lambda=\dfrac{\overline{p_1p}}{\overline{pp_2}}$中，它是以线段的起点为起点、分点为终点的有向线段的数量和以分点为起点、线段的终点为终点的有向线段的数量之比。即$p_1\to p$，$p\to p_2$，也就是起点→分点，分点→终点，这个顺序不能搞错。

如果p点在p_1，p_2之间，那么p点叫做有向线段$\overline{p_1p_2}$的内分点，这时$\overline{p_1p}$，$\overline{pp_2}$具有同一方向，所以$\lambda=\dfrac{\overline{p_1p}}{\overline{pp_2}}$为正；如果$p$点在$p_1$，$p_2$之外，那么$p$点叫外分点，这时$\overline{p_1p}$和$\overline{pp_2}$具有相反的方向，所以$\lambda=\dfrac{\overline{p_1p}}{\overline{pp_2}}$为负。

由上面论述可知：如果p点在p_1、p_2之间，λ可以是任何正数；如果p点在p_1、p_2之外，λ可以是除去-1以外的任何负数。如果p和p_1重合，那么$\lambda=0$；如果p和p_2重合，那么λ不存在。其关系如下页图所示。

例. 有$p_1(-2, -2)$，$p_2(2, 6)$两点，在p_1，p_2两点间求一点p，使$|p_1p|$为全长的四分之一；又在p_2p_1的延长线上求一点Q，使$|p_1Q|$为$|p_1p_2|$长的一半。

解：(1) 设$p(x, y)$为有向线段$\overline{p_1p_2}$的分点，则分$\overline{p_1p_2}$的比为$\lambda=\dfrac{\overline{p_1p}}{\overline{pp_2}}=\dfrac{|p_1p|}{|pp_2|}=\dfrac{1}{3}$。

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{-2+\dfrac{1}{3}\times 2}{1+\dfrac{1}{3}}=-1, \\ y=\dfrac{-2+\dfrac{1}{3}\times 6}{1+\dfrac{1}{3}}=0. \end{cases}$$