测量信息的分析与处理

反分析的模型、方法与工程应用

齐 欢/著

科学出版社
www.sciencep.com

测量信息的分析与处理

反分析的模型、方法与工程应用

齐 欢 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统阐述了工程测量中信息分析与处理的理论和技术，从信息处理的角度，结合多个领域的工程背景，研究了数学物理反问题的提法、模型的建立、解的定义、反问题的解法、反问题的简化、反问题与分布参数控制系统的关系等。书中收集了较多的工程实例，供读者借鉴。

本书可供从事信息处理的工程技术人员和高校理科、工科、医科等师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

测量信息的分析与处理：反分析的模型、方法与工程应用/齐欢著.一北京：科学出版社，2003.6

ISBN 7-03-011616-X

Ⅰ.测… Ⅱ.齐… Ⅲ.工程测量-信息处理 Ⅳ.TB22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 044642 号

责任编辑：王 军/责任校对：王望荣

责任印制：高 嵘/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2003 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2003 年 9 月第一次印刷 印张：11 1/2

印数：1—2000 字数：303 000

定价：25.00 元

前　言

很多工程中所需要的参数或函数不能直接测量，不得不转而测量其他可以测量的量。如何选择可测量的量，如何建立需测的量与可测的量之间的关系，从而求得需测的量，是工程中对测量信息的分析与处理问题。由于需测的量与可测的量之间的关系一般可以用数学物理方程来描述，而且这类分析与处理常常归结为通过可测量的量求解数学物理方程中的待定函数（或常数），因此这在工程上称为数学物理反问题，或反分析。

反分析技术是信息技术、测量技术与数学、物理、工程相结合的产物，是一门交叉科学。从应用角度看，它已经成为很多高新科技的核心技术。

本书是综合多篇博士学位论文写成的，其中包括了作者在反问题上做的一些工作，部分材料取自于《数学物理反问题》（黄光远、刘小军著，山东科学技术出版社，1993）。作者并不想将本书写成一本数学书，而是希望能写成一般信息处理的书，重点在从理论与工程结合上研究反问题的提法与解法，其中也涉及测量点选取的位置（空间分布）、测量数据的多少、测量精度、测量方法与工具对反问题的影响等，希望能对从事工程测量信息处理的科学研究者和工程技术人员有所帮助。

由于数学物理反问题在工程领域分布广，涉及背景复杂，本书不打算对每个工程领域的背景都进行深入的讨论，而是着重在于一般方法的研究，在于各种方法的借鉴。

阅读本书需具有线性代数、常微分方程、偏微分方程和数值分析的基础知识。

本书适用于从事信息处理的工程技术人员与研究人员，高等院校工程、医学、数学、物理等领域工作的教师和研究生阅读参考。

感谢陈传尧、石仲堃、范文涛、刘家琦、钟伟芳、孙德保、费奇、

李迪诸位教授的支持和帮助，同时也感谢王昌明、王小平、杨华、蔡晓峰、张英、吴义明等同志的帮助。

著　者

目　录

第一章　工程反演的数学模型

1.1　数学物理反问题的提法和分类

1.1.1　数学物理反问题

许多工程物理系统借助于物理学的基本定律，常常将其因果关系描述为微分方程，称为数学物理方程。这些方程中包含了研究对象的各种物理参量（通常在系数上）及外部作用（通常在非齐次项）。然而，仅由微分方程尚不能惟一地确定解，还必须附加条件。此外，还存在解的稳定性问题。阿达马（Hadamard）提出一个著名的椭圆方程柯西问题，其解就是不稳定的。因此，人们提出解的适定性问题，即除了给出描述基本因果关系的微分方程外，尚需附加怎样的边界条件和初始条件（即已知信息），方程才具有惟一而稳定的解。若附加条件不足（称为欠定），则解不惟一；若条件过多且矛盾（称为超定），则解不存在；只有条件恰好使解存在而解又稳定才称为适定。

解的适定性研究减少了求解的盲目性，推动了微分方程理论的发展，但有时也束缚了人们的思想。因为大量的实际问题，未必都能归入已研究出的几类适定问题的范畴。例如，人们利用各种手段所获取的信息，很难保证恰恰在欠定与超定之间的这个“点”上，考虑到噪声的存在，一般来说总是多得到一些信息较好，恰恰适定并不一定可靠。又如观测的位置不一定在边界上，或观测时间为非初始时间、方程中某些参量未知等，这些都是造成解不适定的因素，这类问题统称为非适定问题（improper problem），也称为病态问题（ill-posed problem）。

在工程中，还存在一类数据处理问题，其目的是通过对物理现

象的观测，分析和预测物理系统本身的特性或物理系统中的物理参数，这类问题是根据事物的物理、化学及生物变化，推导出该物理场满足的偏微分方程及其边界条件，但方程中的某些系数、场的范围或者边界条件未知，需要我们利用场的某些信息反求这些未知数，所以称为反问题。

反问题(inverse problem)的说法来源于经典的辨识问题的解。著名学者冯康先生曾指出“计算数学的四大方向是：正问题、反问题、代数问题与逼近论问题”，可见反问题的理论和工程应用的地位和作用。一般说来，由因(内因与外因)求果，称为正问题(direct problem)；由果求因(求内因或外因)，则称为反问题。求解反问题也称为反演(inversion)。

从工程物理中提出的各类反问题都有明确的数学形式和定量要求，故称之为数学物理反问题，或偏微分方程的反问题。又由于工程物理系统中的变量不仅与时间有关，也与空间分布有关，故也称为分布参数系统辨识问题或分布参数系统的反演。这类数据处理系统称为数学处理系统。

从物理的角度看，如果已知一个物理系统的初始扰动、边界扰动、源扰动和介质分布，求系统的运动或场的分布形态与强度等，通常称为正问题。反过来，若已知场的全部或部分信息，如场的分布形态、场的强度等，要求确定相应的初始扰动、边界扰动、源扰动或介质分布等一类问题，称为数学物理反问题。

用数学的语言来说，数学物理的正问题就是寻求满足支配方程、初始条件和边界条件的解。而如果微分方程定解问题中原来已知量的一个或几个成为未知量，而原来未知的函数(例如方程的解)现在是已知的，或者与这些函数有关的某些信息是已知的(称这些信息为附加条件)，那么反问题就是由支配方程、初始条件、边界条件和附加条件去确定原问题的未知量。

反问题的研究已有很长的历史，20 世纪初就提出过“瞎子听鼓”问题，即由鼓的声音判断鼓的形状，这实际上是一个振动系统的反问题。1905 年，Herglotz 利用地震数据确定地壜结构，他研究

了偏微分方程$|\Delta t|=1/v(x)$的反问题。从20世纪20年代开始，Ambarzumian研究了固有值反问题(也就是已知振动系统的谐振频率，反求模型参数)。但由于这些研究在应用上没有重大突破，所以在数学界和工程界，长时间未引起足够重视。近几十年来，科学技术的飞速发展改变了这种状态，主要表现为以下几方面：

(1) 计算机、仿真技术及计算方法的飞速发展，使得许多应用领域内对正问题求解已不困难，而原来一些在没有计算机条件下的解算技巧的研究(它远落后于实际需要)逐渐失去作用。即使对一些非线性、时变或间断系统的微分方程，尽管解的适定性尚不清楚，也可通过大量试算求解。

(2) 传感器与测量技术的飞速进步，使得许多由方程的解所描述的物理量在某些区域可以被实时地、足够精确地测量出来。加上物理模拟与数值技术，就可以将正问题的分析与求解，通过实验与仿真解决。然而方程中常被当作已知的物理参量，如弹性模量、导热系数等，却很难实时精确测量。

(3) 几类经典的数学物理现象都是在理想条件下的近似与抽象，仅能定性解释一些基本的物理现象，而当代计算机技术已深入到许多科技领域(如控制、测量、管理、生物医学、能源勘探等)，要求理论计算能对实际工作发挥定量的(而不是定性的)甚至实时的指导作用。因此，模型应能符合各类复杂的实际对象，这不是单纯依靠数学分析所能解决的。

数学物理反问题正是基于上述状况而日益引起人们的重视。特别是在1979年反问题应用于医学，取得CT技术的突破(获得诺贝尔奖)后，更在科学界掀起了反问题研究的热潮。

1.1.2 数学物理反问题的分类

我们可以从不同的角度对反问题进行分类。如果从工程的角度进行分类，数学物理方程反问题可分为“控制”、“识别”、“综合”等类型。如果根据已知信号的来源进行分类，则可将问题分为两类：

第一类，辨识问题。如果已知信号是由观测得到的，则这类反问题称为辨识问题(identification problem)。其中，求模型称为系统辨识或模型辨识；而求外因，则称为源的辨识或外部作用辨识。

第二类，设计问题。如果已知信号不是实测出来的，而是人们希望的，那么这类反问题称为设计问题(design problem)。辨识、设计与控制都属于反问题范畴。尽管从应用上看，辨识用于认识世界，设计与控制用于改造世界，目的有所不同，抽象成数学问题以后，问题的提法却常常是一致的。正因如此，许多近代控制理论结果也可用于求解辨识问题及设计问题。

从数学角度则可将问题分为四类：

第一类，待定微分方程中的未知参数的反问题——算子识别。这一类待定微分算子参数或方程中的右端项的反问题，是自然科学和工程技术的各项领域中最常见的反问题。由于直接测量这些参数在一些离散点处的值往往行不通，人们转而测量与待定参数有一定关系的微分方程的其他量在边界上的值或者其他可获得的信息，再根据这些信息去推断待求的量。工程上称这类问题为遥感(remote sensing)。遥感技术分为主动与被动两大类。被动的遥感技术仅有接收装置，它是靠接收由人工不能干预的被动场(如引力场、磁场、放射场等)的信息推断分析待定的参数。主动的遥感技术则由发射与接收装置组成，通过发射人为的制造场(如地震场、电磁场等)，并通过接收装置得到的信息去分析推断未知参数。主动的遥感又分为静态和动态。静态遥感使用不依赖于时间的静态源(场)，动态遥感使用依赖于时间的动态源(场)。

第二类，待定初始条件的反问题——逆时间过程问题。这一类反问题包括了对扩散方程中扩散源或波动方程中震源的空间位置或强度的分析。

第三类，待定边界条件的反问题——边界控制问题。

第四类，待定边界形状的反问题——几何反问题。发动机进气道的设计是一个典型问题，它要求设计出进气道的形状，使得在其中运动的油气两相流满足某种流场的性质。

1.2 工程中的数学物理反问题

工程中比较典型的振动、扩散(传导)及稳态分布参数系统的反演在数学上可以分别抽象成双曲、抛物及椭圆型三类典型的数学物理方程的反问题。

1.2.1 振动系统中的反问题

在工程中,振动与波动这两个概念是有区别的。但是它们的数学模型相同,故不妨统称为振动系统的反问题。这类反问题的研究历史最长,应用很广,求解方法也最多。

【例 1.1】 地震勘探

石油与天然气的开采是一项综合性技术,它从勘探、钻井、测井到开采,几乎都是在"不能直接观察"的条件下进行的。人们无法钻入地下将地层的结构、各种物性参数拿到,从而确定开采方案。虽然近年来采用高新技术发展了井下彩色电视观测、地下取芯等方法,但是由于实施费用昂贵、观测条件苛刻、小范围局限等,使它不能成为发现与描述油气藏的主要手段。石油开发地球物理学或称油储地球物理学是在 20 世纪 80 年代出现和逐渐引起广泛重视的新的研究领域,它是以传统的地震学、测井学为基础,采用现代数学、物理学、数字图像处理学中的新成就而发展起来的新的应用学科。它以多分量的高分辨率反射地震、跨孔地震、垂直地震剖面(VSP)、弹性波方程正反演技术、波动方程层析成像技术(CT)、地球物理测井技术、地震-测井联合反演等方法为手段,结合石油地质和油藏工程等资料对油储的形态和各种物理参数进行描述和监测,以加快油气藏的勘探进程,扩大油气藏的开采范围,提高油储开发效能。研究的最终目标是对油储孔隙度、饱和度、渗透率和油储形态成像,为油田勘探开发提供依据,以提高油田的采收率。如果能将采收率提高 5%,则我国现有油田可以多开采近 10 亿吨原油,可见它对我国国民经济的发展有着多么重大的意义。

"油储地球物理学"是一门跨传统学科的新分支，在这一研究领域中，数学的各个分支，如微分方程、各种变换、数理统计、最优控制、模糊数学、小波理论、神经网络数学……都可以"有用武之地"。就数学的"属性"而言，油储中的数学不论用到的是什么方法，说到底几乎都属于反问题的范畴。

地震勘探是一种主动遥感技术，它是在地表安放一个人工的震源(如炸药、电火花、电弧脉冲)，制造一人工弹性波，该弹性波在地下传播，由于介质的不均匀性，不同介质分界面的存在，使弹性波在传播过程中发生反射、折射、散射，这样在地表安放的检波器就可以收到回波。人们就是根据这些回波信息去推断地下介质结构以及物性参数。弹性波在地下的传播近似遵从弹性波方程：

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\theta+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f} \tag{1.1}$$

式中，$\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$为介质的位移矢量；$\rho(x,y,z)$为介质密度；λ和μ为介质Lame 系数；$\boldsymbol{f}(x,y,z)$为外力(震源函数)；

$$\theta=\mathrm{div}\boldsymbol{u} \tag{1.2}$$

地震勘探就是根据据地表和地震记录(回波)

$$\boldsymbol{u}|_{z=0}=\Psi(x,y,t)$$

来推断地层的介质参数ρ、λ、μ，达到勘探的目的。这是一个典型的弹性波微分方程组的反问题。由于这种勘探需要在地表记录下$\boldsymbol{u}$的3个分量，从而要求有多分量地震检波器。由于三维反问题在数学处理上的困难，因此目前还只是处在研究阶段。当前应用于生产的一个有希望的方法是在二维或一维的空间中只考虑纵波的情况。在某一地质剖面考虑平面波入射，在地下介质横向均匀的情况下，地震勘探可归结为最简单的一维声波方程反问题。它的数学模型为

$$d(z)\frac{\partial^2 Q(z,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left[e(z)\frac{\partial Q(z,t)}{\partial z}\right]=0$$

$$t\in(0,T) \qquad z\in(0,Z) \tag{1.3a}$$

边值

$$e(z)\frac{\partial Q(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-g(t) \qquad Q(z,t)|_{z=Z}=0 \qquad t\in(0,T) \tag{1.3b}$$

初值

$$Q(z,0)=0 \qquad \frac{\partial Q(z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \qquad z\in(0,Z) \tag{1.3c}$$

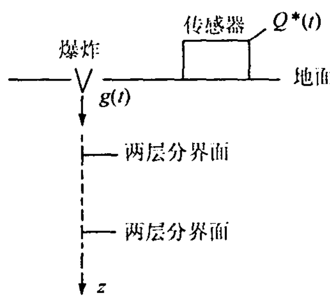

图1.1 地震勘探示意图

式中，$Q(z,t)$是在深度z处t时刻偏离平衡点的相对位移；$d(z)$是介质密度；$e(z)$为介质弹性系数；$g(t)$为爆炸作用于地面的力密度；Z是一足够大的常数。显然，在很深的地方，振波将消失。一般来说，d和e变化很慢，可认为与时间无关。通常，地介质是分层的，故$d(z)$与$e(z)$均可以是逐段连续函数。这样，(1.1)的解在间断点上必须保持Q与$e\frac{\partial Q}{\partial z}$对$z$的连续性，这是由物理背景所决定的(它们分别表示位移与弹性力的连续性)。有了这两个连续性条件，当d与e为已知函数时，(1.1)即可惟一地在给定区域上定解。问题是，介质分布状态未知，故$d(z)$、$e(z)$亦未知。为解决这个问题，可以利用在地面上记录到的、由于爆炸引起振动的数据$Q^*(t)$，$t\in(0,T)$，考虑到噪声，

$$Q^*(t)=Q(0,t)+N(t) \qquad t\in(0,T) \tag{1.4}$$

式中，$Q^*(t)$就是系统的输出，是实测到的信号；$N(t)$为噪声。

由已知输出与输入信号$Q^*(t)$、$g(t)$及方程(1.1)、(1.2)反求出介质参数$d(z)$与$e(z)$，也称为分布参数系统辨识问题。由于要辨识两个未知函数，一般难以保证惟一性。为此，引进如下自变量变换(也称为走时变换)：

$$x=\int_0^z\sqrt{\frac{d(y)}{e(y)}}\mathrm{d}y \tag{1.5}$$

在这个变换下，(1.3a)～(1.3c)可变为

$$b(x)\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[b(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right]=0$$

$$t\in(0,T)\qquad x\in(0,X)\qquad X=\frac{T}{2}\tag{1.6a}$$

边值

$$b(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-g(t)\qquad Q(x,t)|_{x=X}=0\qquad t\in(0,T)\tag{1.6b}$$

初值

$$Q(x,0)=0\qquad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$$

$$x\in(0,X)\qquad X=\frac{T}{2}\tag{1.6c}$$

式中，$b=\sqrt{de}$为介质的波阻抗(wave impedance)，它是介质的另一个物理参量。从(1.5)可看出，由于$\sqrt{\frac{e}{d}}$是波的传播速度，故x是波从地面到达深z处所需的时间，地球物理界称之为"旅行时间"，也称为"走时坐标"，其量纲通常取秒，但表示距离(与光年类似，可称为"声秒"或"波秒")。

这个变换的优点是：

(1) 方程(1.6a)中只含一个未知函数$b(x)$；

(2) 方程(1.6a)的特征线(即波的传播线)为x-t平面上斜率等于±1的直线；

(3) 定解区域已知(记录时间长度为T，x为旅行时间，故震波到达的最大深度为$X=T/2$)。

待求函数$b(x)$属于什么函数呢？首先，由于地质是分层的，故$b(x)$应该是分段连续的；其次，各种介质的波阻抗值是有限的，设其上界与下界分别为已知常数b_{max}与b_{min}，因此，容许函数类应取为

$$U_{ad}=\{b(x)\,|\,b_{min}\leqslant b(x)\leqslant b_{max},b(x)\in C_p^2\}\qquad x\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$$

这里，我们规定 C_p^n 表示函数定义域可分成 p 段，在每段上均具有 n 阶连续导函数类（注意，它并不具有 $n-1$ 阶导函数，即不包含在 C^{n-1} 内，以下均同）。将 U_{ad} 中任一函数代入方程（1.6a），因 $b(x)$ 逐段连续光滑，故在每个光滑段均有经典解，而在其间断点上必须满足连续性条件

$$Q \in C \qquad b(x)\frac{\partial Q}{\partial x} \in C$$

才能保证位移与力的连续性。这样的广义解必然在整个区域 $(0,X)\times(0,T)$ 上存在、惟一。注意：$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 $b(x)$ 有间断的地方产生跳跃。

这样，地震勘探问题就变为如何利用已知函数 $Q(t)$、$g(t)$ 及方程（1.6a）和（1.4），从函数类 U_{ad} 中求出函数 $b(x)$ 的数学物理反问题。

值得注意的是，在不少关于地震勘探的著作中，先假定（1.3a）中 d、e 为常数，将其提到微分号外，根据波速 $v=\sqrt{\frac{e}{d}}$，得

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2}=v^2\Delta Q \quad (\Delta\text{ 为拉普拉斯算子}) \qquad (1.7)$$

解出 Q 与 v 的关系，再假定 v 是 x 的函数，来反演介质的波速 $v(x)$。这样做不仅有逻辑推理上的错误，而且由于（1.7）的解具有有限的二阶导数（它与前面所定义的广义解是不同的），因此，这样求出的解在介质有间断的地方不能保证力的连续性，而且还将导出错误。

我们还可以用其他的变换来代替（1.3a），例如，取变换

$$s=\int_0^z \frac{1}{e(z)}\mathrm{d}z \qquad (1.8)$$

模型（1.3a）～（1.3c）就变成

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}-\frac{1}{b^2 s}\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}=0 \qquad s\in(0,S) \qquad t\in(0,T) \qquad (1.9a)$$

边值

$$\left.\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}=-g(t) \qquad Q(S,t)=0 \qquad t\in(0,T) \quad (1.9b)$$

初值

$$Q(s,0)=\frac{\partial Q(s,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \qquad s\in(0,S) \tag{1.9c}$$

这个变换的优点是克服了$\frac{\partial Q}{\partial s}$的跳跃性，从而使二阶广义导数$\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$存在。

比较(1.9a)与(1.7)，它们形式上是相同的。因此，尽管从(1.7)出发反求波速是错误的，但在一维情况下从(1.7)出发反求"波速"的许多数学结果，仍是可用的。只是反演出来的并非波速，而是波阻抗的倒数，并且自变量也已非原来的深度z，而是通过(1.8)作伸缩变换后的s。这样，数学与物理也就统一起来了。

【例1.2】 振动探伤

通常的超声波探伤仪是根据声波遇到裂缝产生反射的回波来判断故障(图1.2)。

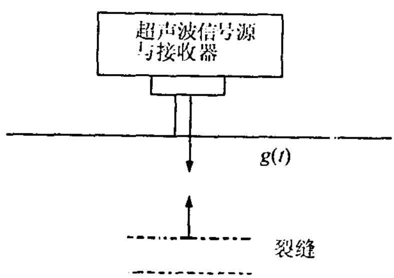

图1.2 超声探伤示意图

这个问题同样也可以用数学模型(1.3a)~(1.3c)或(1.6a)~(1.6c)来描述，所不同的仅仅是作用于材料表面的力函数$g(t)$不是由爆炸产生的，而是由超声波信号发生器产生的声压。目前在探伤仪的设计中并没有应用解前述数学物理反问题的方法。这是因为要求发射的$g(t)$的脉冲宽度需比声波从表面到达裂缝所需时间要短得多，于是就可根据发射波与接收波(遇裂缝反射回来的)时间差来确定裂缝的位置。然而，脉冲愈窄则愈易被吸收，要达到一