技工学校教材

数学

下册

牡丹江电力技术学校 胡仁年 主编

水利电力出版社

JIGONG XUEXIAO JIAOCAI

技工学校教材

数学

下册

牡丹江电力技术学校 胡仁年 主编

水利电力出版社

技工学校教材
数　学
下　册
牡丹江电力技术学校　胡仁年　主编
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　14.25印张　316千字
1987年6月第一版　1987年6月北京第一次印刷
印数00001—47300册　定价1.60元
书号　15143·6358

目　　录

第十三章　极 限 与 连 续

极限概念是微积分学中最基本的概念，由它可以引出导数和定积分的概念；由极限的运算法则可以推出微分法和积分法．函数的连续性是函数的重要特性之一，它与极限概念有密切的联系，也是微积分学中一个重要的基本概念．

本章在复习函数概念等知识的基础上，从无穷小量入手，引入极限概念，并由它导出有关极限的运算法则，然后讨论函数的连续性及连续函数的极限求法．

§13-1　基本初等函数与初等函数

函数是微积分学研究的主要对象，因此，在学习微积分学之前，本节将在系统复习函数概念的基础上，介绍一些初等函数的有关知识．

一、函数的概念

1．函数的定义

（1）定义　设在某变化过程中有两个变量x和y，变量y依赖于x．若对于x的每一个可能取的值，按照某种对应关系f，y都有唯一确定的值与它对应，则y就叫做x的函数，记为

$$y=f(x)$$

x叫做自变量，x的所有可能取的值的集合，叫做函数$y=f(x)$的定义域；与x的值相对应的y的值叫做函数值（或因变量）；函数值的集合叫做函数$y=f(x)$的值域．

（2）注意下面几点：

1）一个函数 $y=f(x)$ 是由它的定义域和对应关系 f 所确定的，值域是随着给定的对应关系 f 和定义域而确定的.

2）如果自变量 x 在定义域内取某一数值 x_0 时，函数 y 才具有确定的对应值，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义.

3）$y=C$（C 为常量）也可以看成是自变量 x 的函数.事实上，无论 x 取任何实数值，y 都有一个确定的 C 值与它对应，根据函数的定义，$y=C$ 为自变量 x 的函数（图13-1）.

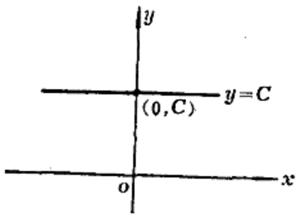


图 13-1

2.函数与函数值的记号

与在代数里用字母代数的作用一样，研究函数时，常常用记号来表示函数，在函数的定义中，我们把"y 是 x 的函数"通常用记号

$$y=f(x)$$

来表示.

在物理或工程技术中，也常把 y 是 x 的函数记为

$$y=y(x)$$

当自变量 x 在定义域中取某一个确定的值 x_0 时，对应的函数值用记号

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}$$

表示.

二、反函数

若给定函数 $y=f(x)$ 的对应关系 f：$x \to y=f(x)$ 是一一对应，则由 f 的逆对应 f^{-1}：$y \to x=f^{-1}(y)$ 所确定的函数 $y=f^{-1}(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.函数 $y=f(x)$ 的定义域

与值域分别是函数$y=f^{-1}(x)$的值域与定义域.

函数$y=f(x)$的图象与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称（如图1-21）.

三、函数定义域的表示法与求法

函数的定义域可以用集合或区间表示法. 其定义域的求法为:

（1）对于反映实际问题的函数，其定义域应由所研究的问题的实际意义来确定;

（2）对于用数学式子$y=f(x)$所表示的函数，其定义域应由使这个式子有意义的所有实数x的集合来确定. 并注意以下几点:

1）偶次根号内的数，必须大于或等于零;

2）分母不能为零;

3）$\log_a u$中的u必须大于零;

4）$\arcsin u$（或$\arccos u$）中的u，其绝对值小于或等于1.

四、函数的表示法

表示函数的方法有三种：公式法、表格法和图象法.

在解决实际问题时，应根据问题的特点选用适当的表示法；有时也可以结合使用.

五、函数的几种特性

1.函数的奇偶性

若对于函数$f(x)$定义域中任意一个x值，都有$f(-x)=-f(x)$成立，则函数$f(x)$就叫做奇函数；其图象关于原点对称（图1-24）.

若对于函数$f(x)$定义域中任意一个x值，都有$f(-x)=f(x)$成立，则函数$f(x)$就叫做偶函数；其图象关于$0y$轴

对称（图1-25）.

2.函数的单调性

若函数$y=f(x)$在区间（a, b）（或无限区间）内随x值增加而增加，即使任意两个自变量的值x_1、$x_2 \in (a, b)$（或无限区间），都有$f(x_1)<f(x_2)$成立，则就称函数$y=f(x)$在区间（a, b）（或无限区间）内为单调增加（或递增的），区间（a, b）（或无限区间）叫做函数$y=f(x)$的单调增加（或递增）区间. 单调增加的函数简称为增函数，其图象为沿ox轴正向上升的（图1-26）.

若函数$y=f(x)$在区间（a, b）（或无限区间）内随x值增加而减少，即设任意两个自变量的值x_1、$x_2 \in (a, b)$（或无限区间），都有$f(x_1)>f(x_2)$成立，则就称函数$y=f(x)$在区间(a, b)（或无限区间）内为单调减少（或递减的），区间（a, b）（或无限区间）叫做函数$y=f(x)$的单调减少（或递减）区间. 单调减少的函数简称为减函数，其图象为沿ox轴正向下降的（图1-27）.

在某一区间上的增函数或减函数叫做在这个区间上的单调函数；这个区间叫做这个函数的单调区间.

3.函数的周期性

对于函数$y=f(x)$，若存在一个常数$L\neq 0$使得当x取定义域内的每一个x值时，都有

$$f(x+L)=f(x)$$

成立，则函数$y=f(x)$叫做周期函数.

使上述关系式成立的最小正数L，叫做函数$y=f(x)$的周期或者称函数$y=f(x)$为以L为周期的周期函数.

例如，我们已经知道的三角函数都是周期函数. $y=\sin x$和$y=\cos x$是以2π为周期的函数，$y=\mathrm{tg}x$和$y=\mathrm{ctg}x$是

以 π 为周期的函数.

$y=\sin nx$和 $y=\cos nx$ 是以$\frac{2\pi}{n}$为周期的函数，因为

$$\sin n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=\sin(nx+2\pi)=\sin nx,$$

$$\cos n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=\cos nx.$$

$y=\sin(\omega x+\varphi)$和$y=\cos(\omega x+\varphi)$，其中ω和φ为常数，是以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的函数，因为 $\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\sin(\omega x+2\pi+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi)$，$\cos\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\cos(\omega x+\varphi)$.

显然，如果函数具有周期性，那末只要在长度等于周期的任何一个区间上来考察就可代替在全部定义域上的研究.

4. 函数的有界性

设函数$y=f(x)$在区间（a，b）（或无限区间）内有定义，如果存在一个常数$M>0$，使得对于一切$x\in(a, b)$（或无限区间），都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数$y=f(x)$在(a,b)（或无限区间）内**有界**，否则就称函数$y=f(x)$在(a,b)（或无限区间）内**无界**.

例如，反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间（1，2）内有界，而在区间（0，1）内无界. 这可证明如下：

因为$1<x<2$，所以$\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$，于是

$$\left|\frac{1}{x}\right|<M=1$$

根据上述定义得知 $y=\dfrac{1}{x}$ 在（1，2）内有界.

又因为$0<x<1$，所以$1<x<+\infty$，这就是说，不存在这样的正数M，使

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$$

对于（0，1）内的一切x值都成立，根据上述定义得知 $y=\dfrac{1}{x}$ 在（0，1）内无界.

六、基本初等函数

在实际问题中经常遇到这样一类函数，它们是由已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等五种函数以及常数C构成的. 因此，通常把这五种函数叫做**基本初等函数**. 这里结合图象把它们的性质再简述如下：

1.幂函数

$y=x^{\alpha}$（常数$\alpha\in\mathrm{R}$），它的定义域和值域随α值而定，但无论α为什么数，当$x\in\mathrm{R}^{+}$时，幂函数总是有定义的.

例如：$y=x^{3}$，$x\in\mathrm{R}$，$y\in\mathrm{R}$（图13-2）为奇函数和增函数；但无界.

$y=x^{2}$，$x\in\mathrm{R}$，$y\in\{y\,|y\geqslant0\}$（图13-3）. 为偶函数；当

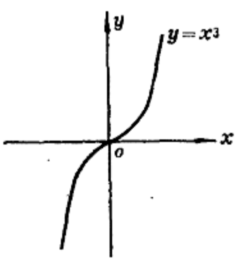


图 13-2

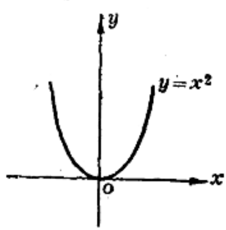


图 13-3

$x\in R^-$时，为减函数；当$x\in R^+$时，为增函数，无界.

$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$，$x\in\{x\mid x\neq 0\}$，$y\in\{y\mid y\neq 0\}$（图13-4）为奇函数；当$x\in R^-$时，为减函数；当$x\in R^+$时，为增函数，无界.

$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，$x\in\{x\mid x\geqslant 0\}$，$y\in\{y\mid\geqslant 0\}$（图13-5）为增函数，无界.

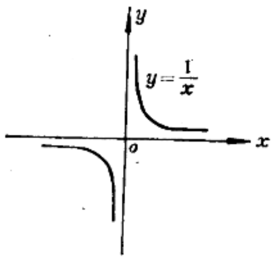


图 13-4

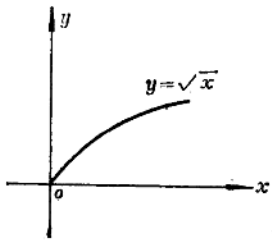


图 13-5

2.指数函数

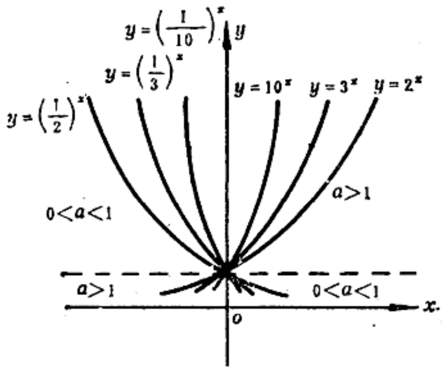
$y=a^x$（常数$a>0$且$a\neq 1$），$x\in R$，$y\in R^+$（图13-6）. 当$0<a<1$时，为减函数；当$a>1$时，为增函数，无界.

3.对数函数

$y=\log_a x$（常数$a>0$且$a\neq 1$），$x\in R^+$，$y\in R$（图13-7）. 它与指数函数$y=a^x$互为反函数. 当$0<a<1$时，为减函数；当$a>1$时，为增函数，无界.

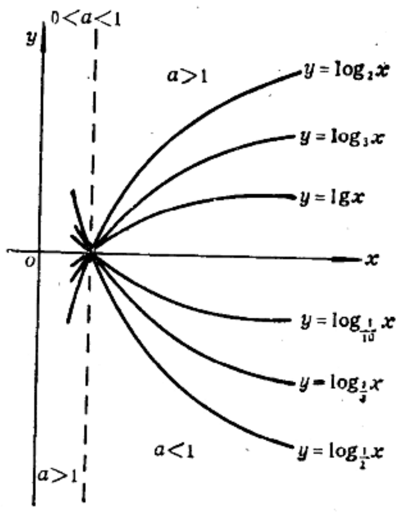
4.三角函数

$y=\sin x$，$x\in R$，$y\in\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$（图13-8）为奇函数和以$2\pi$为周期的周期函数，有界.



$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$
y
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$y=10^x$
$y=3^x$
$y=2^x$
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$a>1$
$0<a<1$
$a>1$
$0<a<1$
x
o

图 13-6



$0<a<1$
y
$a>1$
$y=\log_2 x$
$y=\log_3 x$
$y=\lg x$
o
x
$y=\log_{\frac{1}{10}} x$
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$
$a<1$
$a>1$

图 13-7

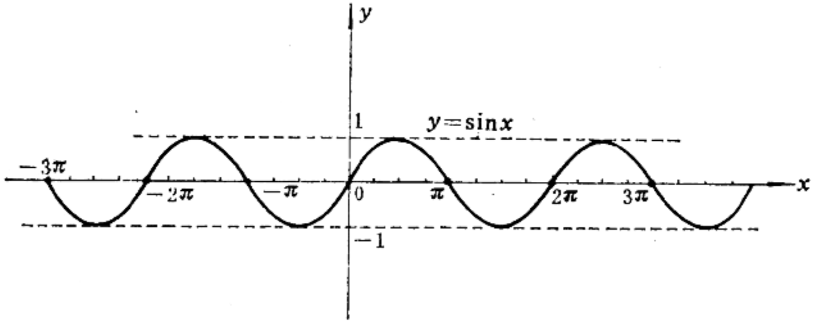


图 13-8

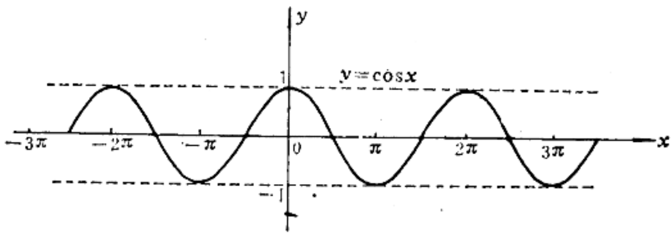


图 13-9

$y=\cos x$，$x\in \mathrm{R}$，$y\in\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$（图13-9）为偶函数和以$2\pi$为周期的周期函数，有界.

$y=\operatorname{tg}x$，$x\in\left\{x\mid x\in \mathrm{R},\ x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in \mathrm{Z}\right\}$；$y\in \mathrm{R}$（图13-10），为奇函数；在$\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$，（$k\in \mathrm{Z}$）的每一个开区间内，都为增函数；为以$\pi$为周期的周期函数，无界.

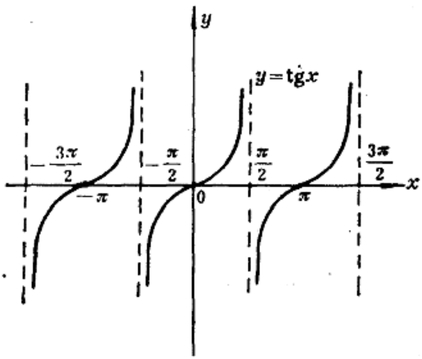


图 13-10

$y=\operatorname{ctg}x$，$x\in\{x\mid x\in \mathrm{R},\ x\neq k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\}$；$y\in \mathrm{R}$（图13-11），为奇函数；在（$k\pi$，$\pi+k\pi$），（$k\in \mathrm{Z}$）的每一个开区间内都为减函数，是以$\pi$为周期的周期函数，无界.

5.反三角函数

$y=\arcsin x$，$x\in\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$y\in\left\{y\mid -\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$（图13-12）为奇函数和增函数，有界.

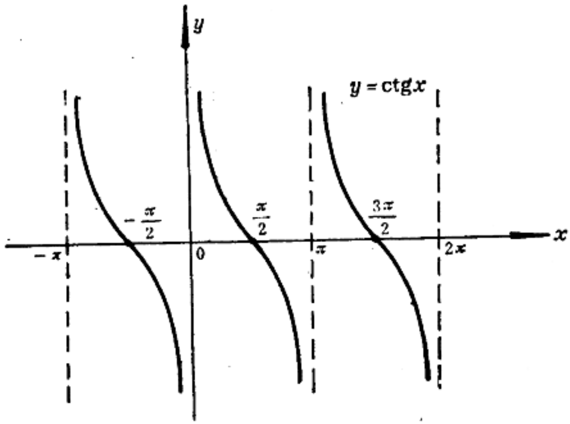


图 13-11

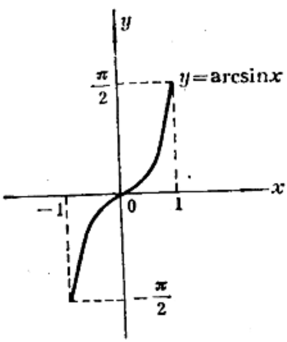


图 13-12

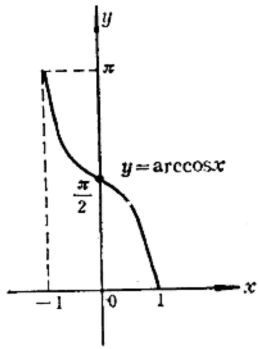


图 13-13

$y=\arccos x$，$x\in\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$y\in\{y|0\leqslant y\leqslant\pi\}$（图13-13）为减函数，有界.

$y=\operatorname{arctg}x$，$x\in R$，$y\in\left\{y\middle|-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}$（图 13-14）

为奇函数和增函数，有界.

$y=\mathrm{arcctg}x$，$x\in\mathrm{R}$；$y\in\{y|\ 0<y<\pi\}$（图13-15），为减函数；有界.

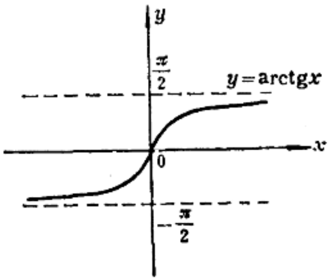


图 13-14

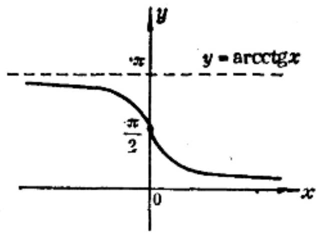


图 13-15

七、复合函数、初等函数

在很多实际问题中，我们经常遇到由基本初等函数（以及多项式）经过复合而成的较复杂的一类函数.

例如：设有质量为m的物体，以初速度v_0垂直上抛，若不计空气的阻力，求这物体的动能E与时间t的函数关系式.

根据力学可知，物体的动能E为速度v的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

同时，物体的速度v又是时间t的函数，若略去空气的阻力，则有

$$v=v_0-gt$$

其中g为重力加速度，因此，得

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$