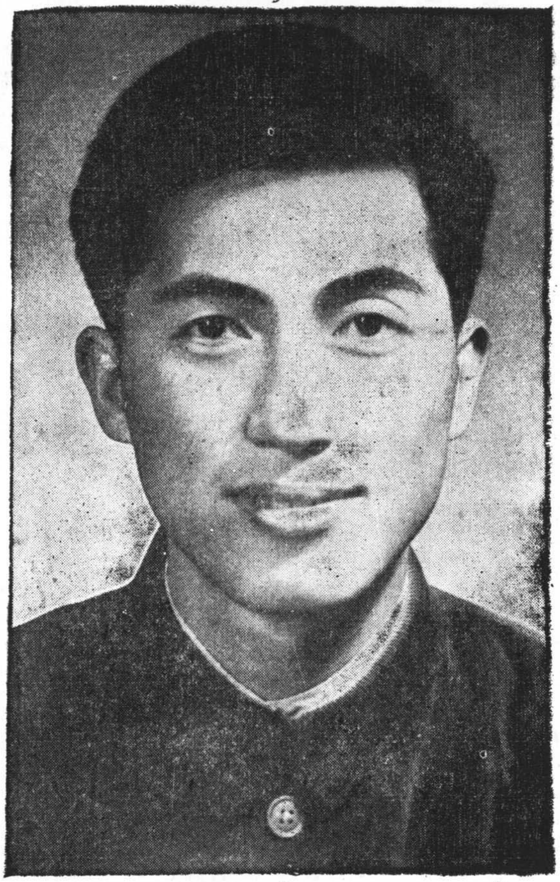
南京大学学报丛书

陈翔炎教授

# 论 文 集

南京大学学报编辑部

一九七九年四月



# 前　　言

陈翔炎同志离开我们已一周年了。他是新中国培养的无产阶级自己的优秀知识分子，他生前在科学研究上成绩卓著。为了纪念他，特编辑出版他的论文集。

这里收集了陈翔炎同志生前的主要科研著作，其中绝大多数曾在《数学学报》、《天文学报》或《南京大学学报》上发表过。文化大革命前，他从事常微分方程定性理论的研究，写出不少论文，其中“含参数微分方程的周期解与极限环”一文尤为突出，受到了数学界的好评，该文除在《数学学报》发表外，并在《中国科学》上刊载了摘要。七十年代以后，他在继续常微分方程的理论研究的同时，又进入了天体力学的研究领域，十分完整地解决了三体问题积分流形的拓扑结构，发表了“一般三体问题流形 $M_8$ 的拓扑结构”的论文，这是我国天体力学定性理论研究最重要的成果之一。他还用自己所推广了的旋转向量场理论研究周期解的唯一性、稳定性等问题，取得了不少好的结果。此外，在稳定性、奇摄动理论、天体力学一些古典定理的进一步研究方面也有他的工作记载。

陈翔炎同志生于一九三五年十二月，江苏溧阳人。一九五三年考入我校数学系，一九五七年毕业留校任助教、讲师。他热爱党、热爱毛主席、周总理、朱德委员长等老一辈无产阶级革命家，热爱社会主义的伟大祖国；他立场坚定，爱憎分明，对“四人帮”的倒行逆施深恶痛绝，顶住恶风浊浪，坚持“三体问题”的科学研究；他忠诚党的教育事业，勤勤恳恳二十一年如一日，对教学工作认真负责，循循善诱，具有丰富的教学经验和很好的教学效果；他言行一致，谦虚谨慎，助人为乐，艰苦朴素；他在从事数学、天体力学的基础理论研究中，更是表现出不畏艰难险阻、独创的革命精神和严谨的科学态度。鉴于他生前的政治表现，教学水平和科研能力，我校党委决定，经江苏省革委会批准于一九七八年六月追认他为教授。

今天，在华国锋同志为首的党中央率领全国人民进行伟大新长征的大好形势下，我们纪念陈翔炎同志，更应以他高尚的品德和刻苦顽强的治学精神激励自己，树雄心，立壮志，攀登科学技术的新高峰。

一九七九年三月

# 目　　录

# CONTENTS

# 含参数微分方程的周期解与极限环*

本文讨论含参数微分方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y,\alpha),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y,\alpha) \tag{1}$$

的周期解与极限环产生与消失的条件。设 $P(x,y,\alpha)$，$Q(x,y,\alpha)$ 在 $R\times I$ 上定义，关于$x,y,\alpha$ 连续，且有下面所需的各阶导数，其中 $R$ 为 $xy$ 平面上的某一区域，而 $I$ 是 $\alpha$ 的变动区间。不失一般性，可以认为 $\alpha=0$ 是 $I$ 的内点。

所要讨论的基本问题是：设当 $\alpha=0$ 时，方程(1)，即

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y,0),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y,0) \tag{2}$$

有周期解

$$L_0:\ x=x_0(t),\ y=y_0(t), \tag{3}$$

试问在什么条件下，当 $\alpha$ 由0作微小变动时，在 $L_0$ 的任意邻近有方程(1)的相应于参数 $\alpha\neq 0$ 的周期解

$$L_\alpha:\ x=x_\alpha(t),\ y=y_\alpha(t), \tag{4}$$

亦即讨论当参数 $\alpha$ 变动时，$L_0$ 不消失的条件。

前人处理这个问题的方法常因 $L_0$ 是否为(2)的极限环而有所不同。当 $L_0$ 是极限环，而(1)形成旋转向量场时，Duff [1] 曾得到很好的结果，后来这些结果又被 G. Seifert[2] 及 Urabe[3]1)等所推广。对于 $L_0$ 位于(2)的周期环

$$L_0^h:\ x=x^h(t),\ y=y^h(t) \tag{5}$$

中的情形，即 $x=x^h(t)$，$y=y^h(t)$ 是(2)的一系周期解，并且

$$L_0:\quad x=x_0(t)=x^0(t),\ y=y_0(t)=y^0(t),$$

Малкин[4] 指出：若 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失，则 $h=0$ 必须是

$$C(h)=\int_0^{T_0^h}[\xi_1^h(t)P_\alpha(x^h(t),y^h(t),0)+\xi_2^h(t)Q_\alpha(x^h(t),y^h(t),0)]dt=0 \tag{6}$$

的根，其中$T_0^h$ 为 $L_0^h$ 的周期，$\xi_1^h(t)$，$\xi_2^h(t)$ 为方程(2)关于 $L_0^h$ 的变分方程的共轭方程的周期解；又若 $C(0)=0$，$C'(0)\neq 0$，则当$|\alpha|\neq 0$ 充分小时，方程(1)在 $L_0$ 邻近存在唯一极限环。不过当 $\xi_1^h(t)$，$\xi_2^h(t)$ 没有求出时，这一判定条件是不能用的。

可以证明[5]：$L_0$ 位于(2)的一周期环中的充要条件是在其某一邻域内方程

$$P(x,y,0)dy-Q(x,y,0)dx=0 \tag{7}$$

存在连续可微的积分因子 $\mu(x,y)$（在假设 $P,Q$ 连续可微的条件下）。以前作者[6] 在这一条

* 1962 年 6 月 25 日收到，1963 年 3 月 19 日收到修改稿。

1) 见本文后记。

件下曾讨论了当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失的条件，并重新得到了(6)。

本文内容主要有两部分。首先对 $L_0$ 位于周期环 $L_0^h$ 中的情形，利用全面积分因子的存在性得出当 $\alpha$ 变动时$L_0$ 不消失的条件，并给出 $\xi_1^h(t)$，$\xi_2^h(t)$ 的明显表达式，其中包括了[6]的主要结果。其次，用后继函数的方法统一处理了 $L_0$ 是极限环或位于周期环中这两种情况下 $L_\alpha(\alpha\neq 0)$ 的存在性问题。对于 $L_0$ 位于周期环中的情形，我们推广了 Малкин 的结果，特别，对于近似 Hamilton 系统就推广了 Л. С. Понтрягин[7] 与张芷芬[8] 的结果；对于 $L_0$ 是极限环的情形，则推广了 Duff 及 G. Seifert 的结果。

## § 1

设 $L_0$ 位于周期 $L_0^h$ 中，则在 $L_0$ 的邻近方程(7)必存在全局积分因子 $\mu(x, y)$。

**定理 1.** 若 $L_0$ 位于周期环 $L_0^h$ 中，且当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失，则 $h=0$ 必须是

$$\widetilde{C}(h)=\int_{L_0^h}\mu(x, y)Q_\alpha(x, y, 0)dx-\mu(x, y)P_\alpha(x, y, 0)dx=0 \tag{8}$$

的根；又若 $\widetilde{C}(0)=0$，$\widetilde{C}(h)$ 在$h=0$ 不取得极值，则当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失。

证. 以 $U(x, y)=c$ 记方程

$$\mu(x, y)P(x, y, 0)dy-\mu(x, y)Q(x, y, 0)dx=0 \tag{9}$$

的积分，则沿(1)的解应有

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}P(x, y, \alpha)+\frac{\partial U}{\partial y}Q(x, y, \alpha)&=-\mu(x, y)Q(x, y, 0)[P(x, y, 0)+\\&+\alpha P_\alpha(x, y, \alpha_1^*)]+\mu(x, y)P(x, y, 0)[Q(x, y, 0)+\alpha Q_\alpha(x, y, \alpha_2^*)]=\\&=\alpha\{\mu(x, y)[P(x, y, 0)Q_\alpha(x, y, \alpha_2^*)-Q(x, y, 0)P_\alpha(x, y, \alpha_1^*)]\},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\alpha_1^*$ 与 $\alpha_2^*$ 为 0 与$\alpha$ 之间的两个数。设当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时，方程(1)在 $L_0$ 邻近有周期解 $L_\alpha$，其周期为 $T_\alpha$，则

$$\int_0^{T_\alpha}\frac{dU}{dt}\Big|_{L_\alpha}dt=0,$$

从而由(10)得

$$\int_0^{T_\alpha}\{\mu(x, y)[P(x, y, 0)Q_\alpha(x, y, \alpha_2^*)-Q(x, y, 0)P_\alpha(x, y, \alpha_1^*)]\}_{L_\alpha}dt=0. \tag{11}$$

在(11)中命$\alpha\to 0$ 即得

$$\int_0^{T_0}\{\mu(x, y)[P(x, y, 0)Q_\alpha(x, y, 0)-Q(x, y, 0)P_\alpha(x, y, 0)]\}_{L_0}dt=0 \tag{12}$$

化(12)为线积分就得

$$\widetilde{C}(0)=\int_{L_0}\mu(x, y)Q_\alpha(x, y, 0)dx-\mu(x, y)P_\alpha(x, y, 0)dy=0.$$

现证定理的第二部分．不妨设 $L_0^h$ 的轨线方程由 $U(x, y)=h$ 确定，且当 $h_1>h_2$ 时 $L_0^{h_1}$ 位于 $L_0^{h_2}$ 的内侧；由于$\widetilde{C}(h)$ 在 $h=0$ 不取得极值，故对任一 $\varepsilon>0$，必存在 $h_1<h_2$，$|h_i|<\varepsilon\ (i=1, 2)$；使得$\widetilde{C}(h_1)\widetilde{C}(h_2)<0$；今设 $\widetilde{C}(h_1)>0>\widetilde{C}(h_2)$（其他情况证明类似）。

由于 $L_0^h$ 形成周期环，故有横截线 $\Gamma$，以 $M_0^h$ 记其与 $L_0^h$ 的交点．当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小

时，在 $L_0$ 邻近，$\Gamma$ 也应是方程(1)的横截线．今证：若 $\alpha>0$ 充分小，则自 $M_0^{h1}$ 出发的方程(1)的轨线 $L_\alpha(M_0^{h1})$ 与 $\Gamma$ 的次一交点 $M_\alpha^{h1}$（设由 $M_0^{h1}$ 到 $M_\alpha^{h1}$ 所经的时间为 $T_\alpha^{h1}$）必位于 $L_0^{h1}$ 的外侧；为此只须证明 $U_{M_\alpha^{h1}}>U_{M_0^{h1}}$. 因为

$$U_{M_\alpha^{h1}}-U_{M_0^{h1}}=\int_0^{T_\alpha^{h1}}\left[\frac{dU}{dt}\right]_{L_\alpha(M_0^{h1})}dt,$$

故由(10)式知

$$\begin{aligned}U_{M_\alpha^{h1}}-U_{M_0^{h1}}&=\alpha\int_0^{T_\alpha^{h1}}\{\mu(x,y)[P(x,y,0)Q_\alpha(x,y,\alpha_2^*)-\\&\quad-Q(x,y,0)P_\alpha(x,y,\alpha_1^*)]\}_{L_\alpha(M_0^{h1})}dt=\\&=\alpha\left\{\int_0^{T_0^{h1}}\{\mu(x,y)[P(x,y,0)Q_\alpha(x,y,0)-\right.\\&\quad\left.-Q(x,y,0)P_\alpha(x,y,0)]\}_{L_0^{h1}}dt+O(\alpha)\right\}=\\&=\alpha\,\widetilde{C}(h)+O(\alpha^2)>0.\end{aligned}$$

在上式中 $T_0^{h1}$ 为 $L_0^{h1}$ 的周期．同理可证方程(1)的自 $M_0^{h2}$ 出发的轨线 $L_\alpha(M_0^{h2})$ 与 $\Gamma$ 的次一交点必位于 $L_0^{h2}$ 的内侧；因而在由 $L_\alpha(M_0^{h1})$，$L_\alpha(M_0^{h2})$ 与 $\Gamma$ 上的弧段 $\widehat{M_0^{h1}M_\alpha^{h1}}$，$\widehat{M_0^{h2}M_\alpha^{h2}}$ 所围成的区域内至少有方程(1)的一稳定极限环．同理可证当 $\alpha<0$ 而其绝对值充分小时，在 $L_0$ 邻近方程(1)至少有一不稳定极限环．

分析定理 1 的证明不难得到下列更一般的定理：

**定理 1′．** 若在某一包含 $L_0$ 的单连通区域内有

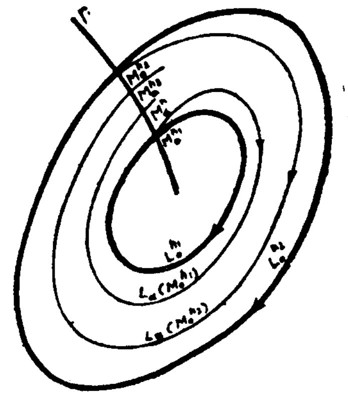


图 1

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}P(x,y,0)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}Q(x,y,0)\right]\equiv 0,\qquad(13)$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1$$

即

$$\mu(x,y)\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}P(x,y,0)dy-\mu(x,y)\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}Q(x,y,0)dx=0,$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1$$

是全微分方程；并且 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失，则 $h=0$ 必须是

$$\widetilde{C}_n(h)=\int_{L_0^h}\mu(x,y)\frac{\partial_n}{\partial\alpha_n}Q(x,y,0)dx-\mu(x,y)\frac{\partial_n}{\partial\alpha_n}P(x,y,0)dy=0\qquad(14)$$

的根；又若 $\widetilde{C}(0)=0$，$\widetilde{C}_n(h)$ 在 $h=0$ 不取得极值，则当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失．

**引理 1．** 方程(7)的积分因子 $\mu(x,y)$ 沿着(2)的任一解

$$x=\bar{x}(t),\quad y=\bar{y}(t)$$

取值时可表为

$$\mu(\bar{x}(t),\ \bar{y}(t)) = \mu(\bar{x}(0),\ \bar{y}(0))e^{-\int_0^t [P_x(\bar{x}(t),\ \bar{y}(t),\ 0)+Q_y(\bar{x}(t),\ \bar{y}(t),\ 0)]dt} \tag{15}$$

证．由于 $\mu(x, y)$ 是(7)的积分因子，故有

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,\ y)P(x,\ y,\ 0))] + \frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,\ y)Q(x,\ y,\ 0)] \equiv 0,$$

即

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}P(x,\ y,\ 0) + \frac{\partial\mu}{\partial y}Q(x,\ y,\ 0) = -\left(\frac{\partial P(x,\ y,\ 0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,\ y,\ 0)}{\partial y}\right)\mu.$$

因而有

$$\frac{d\mu(\bar{x}(t),\bar{y}(t))}{dt} = -[P_x(\bar{x}(t),\ \bar{y}(t),\ 0) + Q_y(\bar{x}(t),\bar{y}(t),\ 0)]\mu(\bar{x}(t),\bar{y}(t)). \tag{16}$$

由(16)积分即得(15).

**引理 2.** $\mu(x, y)Q(x, y, 0)$, $-\mu(x, y)P(x, y, 0)$ 沿 $L_0^h$ 取值时是(2)的相应于 $L_0^h$ 的变分方程的共轭方程的周期解，即 $\xi_1^h(t)$, $\xi_2^h(t)$.

证．方程(2)相应于 $L_0^h$ 的变分方程的共轭方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1^h}{dt} &= -P_x(x^h,\ y^h,\ 0)\,\xi_1^h - Q_x(x^h,\ y^h,\ 0)\,\xi_2^h, \\ \frac{d\xi_2^h}{dt} &= -P_y(x^h,\ y^h,\ 0)\,\xi_1^h - Q_y(x^h,\ y^h,\ 0)\,\xi_2^h. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

现证 $\xi_1^h = \mu(x^h, y^h)Q(x^h, y^h, 0)$, $\xi_2^h = -\mu(x^h, y^h)P(x, y, 0)$ 满足(17)的第一式．由于 $\mu(x, y)$ 是(7)的积分因子，故有

$$\mu[P_x(x,\ y,\ 0) + Q_y(x,\ y,\ 0)] = -[\mu_x P(x,\ y,\ 0) + \mu_y Q(x,\ y,\ 0)], \tag{18}$$

又

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mu(x,\ y)Q(x,\ y,\ 0)}{dt}\right|_{L_0^h} &= \left\{\left[\mu_x\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx}\right]Q(x,\ y,\ 0) + \right. \\ &\left.+ \mu\left[Q_x(x,\ y,\ 0)\frac{dx}{dt} + Q_y(x,\ y,\ 0)\frac{dy}{dt}\right]\right\}_{L_0^h} = \\ &= \{[\mu_x P(x,\ y,\ 0) + \mu_y Q(x,\ y,\ 0)]Q(x,\ y,\ 0) + \\ &+ \mu[Q_x(x,\ y,\ 0)P(x,\ y,\ 0) + Q_y(x,\ y,\ 0)Q(x,\ y,\ 0)]\}_{L_0^h}. \end{aligned} \tag{19}$$

以(18)代入(19)即得

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mu(x,\ y)Q(x,\ y,\ 0)}{dt}\right|_{L_0^h} &= -P_x(x^h,\ y^h,\ 0)[\mu(x^h,\ y^h)Q(x^h,\ y^h,\ 0)] - \\ &- Q_x(x^h,\ y^h,\ 0)[-\mu(x^h,\ y^h)P(x^h,\ y^h,\ 0)]. \end{aligned}$$

因而(17)的第一式被满足，同理可证(17)的第二式亦被满足．

由定理 1 及引理 1，2，立即可得

**定理 2.** 若 $L_0$ 位于周期环 $L_0^h$ 中，且当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失，则 $h=0$ 必为

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{C}}(h) = \int_0^{T_0^h} e^{-\int_0^t [P_x(x,y,0)+Q_y(x,y,0)]_{L_0^h}dt} &[Q_\alpha(x,\ y,\ 0)P(x,\ y,\ 0) - \\ &- P_\alpha(x,\ y,\ 0)Q(x,\ y,\ 0)]_{L_0^h}\,dt = 0^{1)} \end{aligned} \tag{20}$$

---

1) 显见 $\tilde{C}(h)$ 与 $\tilde{\tilde{C}}(h)$ 只能相差一常数因子．

的根，而 $e^{-\int_0^t [P_x(x,y,0)+Q_y(x,y,0)]_{L_0^h} dt} Q(x^h, y^h, 0)$ 与 $-e^{\int_0^t [P_x(x,y,0)+Q_y(x,y,0)]_{L_0^h} dt} P(x^h, y^h, 0)$ 为方程(2)的相应于 $L_0^h$ 的变分方程的共轭方程的周期解. 又若 $\widetilde{\widetilde{C}}(0)=0$，$\widetilde{\widetilde{C}}(h)$ 在 $h=0$ 不取得极值，则当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失.

由定理 1′ 及引理 1，2 不难写出与定理 2 类似的定理，从略.

## § 2

现在我们用后继函数的方法讨论 $L_0$ 不消失的条件.

以 $L_0$ 的弧长 $s$ 为参数，将其方程改写为

$$L_0:\quad x=\varphi(s),\ y=\phi(s). \tag{3'}$$

设 $L_0$ 为负定向（正定向的情况讨论类似），取外法线方向为正，引进曲线坐标 $(s, n)$，其坐标变换式如下：

$$x=\varphi(s)-n\phi'(s),\quad y=\phi(s)+n\varphi'(s). \tag{21}$$

上式中 $n$ 表过 $(\varphi(s), \phi(s))$ 处的 $L_0$ 的法线长. 以(21)代入(1)得

$$\frac{\varphi'(s)-\phi'(s)\dfrac{dn}{ds}-n\phi''(s)}{\phi'(s)+\varphi'(s)\dfrac{dn}{ds}+n\varphi''(s)}=\frac{P(\varphi(s)-n\phi'(s),\ \phi(s)+n\varphi'(s),\ \alpha)}{Q(\varphi(s)-n\phi'(s),\ \phi(s)+n\varphi'(s),\ \alpha)}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{dn}{ds}&=\frac{Q(x,y,\alpha)\varphi'(s)-P(x,y,\alpha)\phi'(s)-n[P(x,y,\alpha)\varphi''+Q(x,y,\alpha)\phi'']}{P(x,y,\alpha)\varphi'(s)+Q(x,y,\alpha)\phi'(s)}=\\&=F(s,n,\alpha),\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(s)&=\frac{P(\varphi(s),\phi(s),0)}{[P^2(\varphi(s),\phi(s),0)+Q^2(\varphi(s),\phi(s),0)]^{\frac12}}=\frac{P_0}{(P_0^2+Q_0^2)^{\frac12}},\\ \phi'(s)&=\frac{Q(\varphi(s),\phi(s),0)}{[P^2(\varphi(s),\phi(s),0)+Q^2(\varphi(s),\phi(s),0)]^{\frac12}}=\frac{Q_0}{(P_0^2+Q_0^2)^{\frac12}},\\ \varphi''(s)&=\frac{-Q_0}{(P_0^2+Q_0^2)^2}\left(P_0^2\frac{\partial Q_0}{\partial x}+P_0Q_0\frac{\partial Q_0}{\partial y}-P_0Q_0\frac{\partial P_0}{\partial x}-Q_0^2\frac{\partial P_0}{\partial y}\right),\\ \phi''(s)&=\frac{P_0}{(P_0^2+Q_0^2)^2}\left(P_0^2\frac{\partial Q_0}{\partial x}+P_0Q_0\frac{\partial Q_0}{\partial y}-P_0Q_0\frac{\partial P_0}{\partial x}-Q_0^2\frac{\partial P_0}{\partial y}\right),\\ &P_0=P(\varphi(s),\phi(s),0),\ \frac{\partial P_0}{\partial x}=P_x(\varphi(s),\phi(s),0),\ \cdots.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

以 $l$ 记 $L_0$ 的长度，$n=n(s, n_0, \alpha)$ 记(22)的当 $s=0$ 时，$n=n_0$ 的解；考虑 $L_0$ 上的点 $(\varphi(0), \phi(0))$ 处的后继函数 $n(l, n_0, \alpha)$ 与 $n_0$ 之差

$$\Psi(n_0,\alpha)=n(l,n_0,\alpha)-n_0=\int_0^l F(s,n(s,n_0,\alpha),\alpha)ds, \tag{24}$$

则 $n=n(s, n_0, \alpha)$ 是(22)的周期解的充要条件是

$$\Psi(n_0,\alpha)=0. \tag{25}$$

现求$\Psi_\alpha(n_0,\alpha)$的表达式。由(24)知

$$\Psi_\alpha(n_0,\alpha)=\int_0^l[F_\alpha+F_n n_\alpha]ds. \tag{26}$$

由(22)对$\alpha$微分得

$$\frac{dn_\alpha}{ds}=F_n n_\alpha+F_\alpha,\quad n_\alpha(0,n_0,\alpha)=0. \tag{27}$$

所以

$$n_\alpha=e^{\int_0^s F_n ds}\int_0^s e^{-\int_0^s F_n ds}F_\alpha ds. \tag{28}$$

以(28)代入(26)，然后分部积分即得

$$\Psi_\alpha(n_0,\alpha)=e^{\int_0^l F_n ds}\int_0^l e^{-\int_0^s F_n ds}F_\alpha ds. \tag{29}$$

同时由(22)容易算出

$$F_\alpha(s,0,0)=\frac{P_0Q_{0\alpha}-P_{0\alpha}Q_0}{P_0^2+Q_0^2}=\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\bigg|_{L_0;\alpha=0},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{Q}{P}. \tag{30}$$

$$F_n(s,0,0)=\frac{P_0^2Q_{0y}-P_0Q_0(P_{0y}+Q_{0x})+Q_0^2P_{0x}}{(P_0^2+Q_0^2)^{3/2}}=H(s), \tag{31}$$

$H(s)$是$L_0$的正交轨线的曲率。

由(29)，(30)，(31)即得

$$\Psi_\alpha(0,0)=e^{\int_0^l H(s)ds}\int_0^l e^{-\int_0^s H(s)ds}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\bigg|_{L_0;\alpha=0}ds. \tag{32}$$

若回到原来的自变量$t$，则因$\dfrac{ds}{dt}=(P_0^2+Q_0^2)^{\frac12}$，故有

$$\begin{aligned}H(s)ds&=\frac{1}{P_0^2+Q_0^2}[Q_0^2P_{0x}-P_0Q_0(P_{0y}+Q_{0x})+P_0^2Q_{0y}]dt=\\&=\left[P_{0x}+Q_{0y}-\frac{P_0^2P_{0x}+P_0Q_0(P_{0y}+Q_{0x})+Q_0^2Q_{0y}}{P_0^2+Q_0^2}\right]dt=\\&=(P_{0x}+Q_{0y})dt-\frac12 d\ln(P_0^2+Q_0^2).\end{aligned}$$

从而由(32)即得

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(0,0)=&\frac{1}{[P^2(x_0(0),y_0(0),0)+Q^2(x_0(0),y_0(0),0)]^{\frac12}}\times\\&\times e^{\int_0^{T_0}(P_{0x}+Q_{0y})dt}\int_0^{T_0}e^{-\int_0^t(P_{0x}+Q_{0y})dt}(P_0^2+Q_0^2)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\bigg|_{L_0;\alpha=0}dt.\end{aligned} \tag{32}$$

由于$\Psi(0,0)=0$，因此若$\Psi_\alpha(0,0)\neq0$，即

$$\int_0^{T_0}e^{-\int_0^T(P_{0x}+Q_{0y})dt}(P_0^2+Q_0^2)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\bigg|_{L_0;\alpha=0}dt\neq0, \tag{33}$$

则由隐函数存在定理知：当$|n_0|$充分小时，由(25)可确定$\alpha$为$n_0$的单值函数$\alpha=\alpha(n_0)$，满足条件$\alpha(0)=0$；因而若$L_0$位于周期环中，则当$|n_0|$充分小时必有$\alpha(n_0)\equiv0$，这表明在$L_0$邻近不存在周期解。若$L_0$为极限环，则当$|n_0|\neq0$充分小时有$\alpha(n_0)\neq0$，特

别，若 $L_0$ 不是复合极限环时，就有 $\alpha(n_0)\neq 0$. 这就证明了下列定理：

**定理 3**．若 $L_0$ 位于周期环 $L_0^h$ 中，又当 $\alpha$ 变动时它不消失，则必有

$$\int_0^{T_0} e^{-\int_0^t (P_{0x}+Q_{0y})dt}\,(P_0^2+Q_0^2)\left.\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right|_{L_0\ \alpha=0} dt = 0,$$

即 $\mathscr{C}(0)=0$；若 $L_0$ 为极限环，而且(33)成立，则当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失.

若以 $n=n(s,\ s_0,\ n_0,\ \alpha)$ 表示(22)的当 $s=s_0$ 时 $n=n_0$ 的解，考虑 $L_0$ 在 $(\varphi(s_0),\ \varphi(s_0))$ 处的后继函数与 $n_0$ 之差

$$\Psi^{s_0}(n_0,\ \alpha)=n(l,\ s_0,\ n_0,\ \alpha)-n_0,\quad 0\leqslant s\leqslant l,$$

则不难看出应有

$$\Psi_\alpha^{s_0}(0,\ 0)=e^{\int_0^l H(s)ds}\int_0^l e^{-\int_{s_0}^{s_0+s} H(s)ds}\left.\frac{\partial\theta(s+s_0)}{\partial\alpha}\right|_{L_0;\,\alpha=0} ds. \tag{34}$$

**定义**．复合极限环 $L_0$ 称为外稳定（外不稳定）的，若当 $n_0>0$ 充分小时，恒有 $\Psi(n_0,0)\leqslant 0(\geqslant 0)$；又若当 $n_0<0$，但其绝对值充分小时，恒有 $\Psi(n_0,\ 0)\geqslant 0\ (\leqslant 0)$，则 $L_0$ 称为内稳定（内不稳定）的；内侧稳定（不稳定）而外侧不稳定（稳定）的复合极限环称为半稳定的复合极限环.

上列定义的缺点是：它不能包括复合极限环的所有可能情形.

类似于旋转向量场的情形，可证下面的

**定理 4**．若 $\Psi_\alpha(0,\ 0)\neq 0$，即(33)成立，则极限环 $L_0$ 为半稳定的充要条件是：$\alpha(n_0)$ 在 $n_0=0$ 时取得极值，即当 $\alpha$ 自 0 向某一方变动时方程(1)在 $L_0$ 两侧同时出现极限环，而当 $\alpha$ 向另一方变动时，极限环消失. 又若对所有 $0\leqslant s_0\leqslant l$ 恒有 $\Psi_\alpha^{s_0}(0,\ 0)\neq 0$，则当 $|\alpha|$ 充分小时，在 $L_0$ 邻近方程(1)相应于不同 $\alpha$ 的周期解是不相交的.

证．为简单起见，假设 $L_0$ 不是复合极限环；对于 $L_0$ 是复合极限环情形，不难看出，几乎只须重复下列证明就行了.

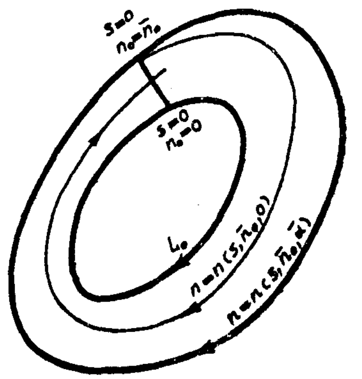


图 2

为确定起见，设 $\Psi_\alpha(0,0)>0$，因而必存在 $\delta>0$，使当 $|\alpha|<\delta$，$|n_0|<\delta$ 时也有 $\Psi_\alpha(n_\alpha,\alpha)>0$. 若对某一 $0<\bar{n}_0<\delta$，有 $0<\bar{\alpha}=\alpha(\bar{n}_0)<\delta$，则 $L_0$ 必为外稳定. 事实上，因为

$\Psi(\bar{n}_0,\ \bar{\alpha})=0$，$\Psi_\alpha(\bar{n}_0,\ \alpha)>0$，$|\alpha|<\delta$，故有 $\Psi(\bar{n}_0,\ 0)<0$，即 $n(l,\ \bar{n}_0,\ 0)-\bar{n}_0<0$，因而 $L_0$ 必为外稳定. 同理可证：若存在 $-\delta<\bar{\bar{n}}_0<0$，使 $0<\alpha(\bar{\bar{n}}_0)<\delta$，则 $L_0$ 必为内不稳定；若有 $0<\hat{n}_0<\delta$，使 $-\delta<\alpha(\tilde{n}_0)<0$，则 $L_0$ 必为外不稳定；若有 $-\delta<\tilde{\tilde{n}}_0<0$，使 $-\delta<\alpha(\tilde{\tilde{n}}_0)<0$，则 $L_0$ 必为内稳定. 综上所述可知：$L_0$ 为半稳定环的充要条件是 $\alpha(n_0)$ 在 $n_0=0$ 时取得极值. 当 $\Psi_\alpha(0,0)>0$，而 $\alpha(n_0)$ 在 $n_0=0$ 时取得极小（大）值时，$L_0$ 为外（内）稳定、内（外）不稳定环；当 $\Psi_\alpha(0,\ 0)<0$ 时，情况刚刚相反.

由 $\Psi(n_0,\ \alpha(n_0))\equiv 0$ 出发，不难看出：使 $\alpha^{(k)}(0)$ 第一个不等 0 的数 $m$（即 $\alpha^{(k)}(0)=0$，当 $k=0,\ \cdots,\ m-1$；$\alpha^{(m)}(0)\neq 0$）与 $L_0$ 的重数是相同的，因此定理的第一部分结论就很显

然．不过这一证明方法对于 $\Psi(n_0, \alpha)$ 的要求较高，即对 $P(x, y, \alpha)$，$Q(x, y, \alpha)$ 的要求较高，而且不适用于 $L_0$ 是复合极限环的情形．

现证定理的第二部分．若 $L_0$ 在的充分小邻域内有方程(1)的相应于两个不同 $\alpha$ 的周期解 $L_{\alpha_1}$ 与 $L_{\alpha_2}$ 相交（$|\alpha_i|$ 充分小，$i=1, 2$），设交点的曲线坐标为 $(s_0, \bar{n}_0)$，则应有 $\Psi^{s_0}(\bar{n}_0, \alpha_1)=0$，$\Psi^{s_0}(\bar{n}_0, \alpha_2)=0$，但另一方面，由于 $\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)\neq 0$，故在 $L_0$ 的邻近由 $\Psi^{s_0}(n_0, \alpha)=0$ 应单值地确定 $\alpha=\alpha(s_0, n_0)$，矛盾．定理证毕．

特别，如果有 $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\geqslant 0$，且沿(2)的任一轨线 $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\neq 0$，则显然有 $\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)\neq 0$，因而 Duff 及 G. Seifert 的结果就可由定理3，4得出．在[9]中，日本两数学家曾推广了 Poincare-Bendixson 环域定理（同样的定理曾被作者利用本文定理3的结果而独立得到[10]），利用这一推广，对方程(1)进行定性讨论，也可以推广 G. Seifert 的结果．

**引理 3.** 如果 $L_0$ 不是单重极限环，即

$$\int_0^l H(s)ds=0,$$

则对所有的 $0\leqslant s_0\leqslant l$，$\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)$ 均有相同的符号．

证．

$$\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)=e^{\int_0^l H(s)ds}\int_0^l e^{-\int_{s_0}^{s_0+s}Hds}\frac{\partial\theta(s+s_0)}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}ds=\int_0^l e^{-\int_{s_0}^{s_0+s}Hds}\frac{\partial\theta(s+s_0)}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}ds.$$

命 $s_0+s=s'$，则得

$$\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)=\int_{s_0}^{s_0+l}e^{-\int_{s_0}^{s'}Hds}\frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}ds'=e^{\int_0^{s_0}Hds}\int_{s_0}^{s_0+l}e^{-\int_0^{s'}Hds}\frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}ds'.$$

由于 $H(s)$，$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}$ 均是以 $l$ 为周期的函数，且 $\int_0^l Hds=0$，故 $e^{-\int_0^{s'}Hds}\frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}$ 也是以 $l$ 为周期的函数，因而有

$$\int_{s_0}^{s_0+l}e^{-\int_0^{s'}Hds}\frac{\partial\theta(s')}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}ds'=\int_0^l e^{-\int_0^{s}Hds}\frac{\partial\theta(s)}{\partial\alpha}\Big|_{L_0;\alpha=0}ds=\Psi_\alpha(0, 0),$$

所以

$$\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)=\Psi_\alpha(0, 0)\,e^{\int_0^{s_0}H(s)ds} \tag{35}$$

故 $\Psi^{s_0}_\alpha(0, 0)$ 与 $\Psi_\alpha(0, 0)$ 同号．

由引理3及定理4立即可得

**定理 5.** 若 $L_0$ 是多重极限环或复合极限环，而且(33)成立，则当 $\alpha$ 变动时，极限环 $L_0$ 不消失．又当 $|\alpha|$ 充分小时，在 $L_0$ 邻近方程(1)相应于不同 $\alpha$ 的周期解是不相交的；$L_0$ 是半稳定环的充要条件是：$\alpha(n_0)$ 在 $n_0=0$ 时取极值．

对于 $L_0$ 是单重极限环的情形，由于[1)]

$$\Psi_{n_0}(0, 0)=e^{\int_0^l Hds}-1=e^{\int_0^{T_0}(P_{0x}+Q_{0y})dt}-1\neq 0, \tag{36}$$

1) $\Psi_{n_0}(0, 0)$ 的计算方法与 $\Psi_\alpha(0, 0)$ 的计算方法类似．

因此当 $|\alpha|$ 充分小时，由 $\Psi(n_0,\alpha)=0$ 可唯一确定 $n_0=n_0(\alpha)$，即当 $|\alpha|$ 充分小时，方程(1)在 $L_0$ 邻近存在唯一的极限环，且与 $L_0$ 有相同的稳定性；至于此时相应于不同 $\alpha$ 的周期解是否可以相交，尚待进一步研究。

现在计算 $\dfrac{d\alpha}{dn_0}$ 在 $s=0$，$n_0=0$ 处的值，此时

$$\frac{d\alpha}{dn_0}=-\frac{\Psi_{n_0}(0,0)}{\Psi_\alpha(0,0)}.$$

以 $\Psi_{n_0}(0,0)$，$\Psi_\alpha(0,0)$ 的表达式代入上式即得

$$\left.\frac{d\alpha}{dn_0}\right|_{s=0,\,n_0=0}=\frac{1-e^{-\int_0^l H ds}}{\int_0^l e^{\int_0^s H ds}\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right|_{L_0;\,\alpha=0}ds} \tag{37}$$

或

$$\left.\frac{d\alpha}{dn_0}\right|_{s=0,\,n_0=0}=\frac{[P^2(x_0(0),y_0(0),0)+Q^2(x_0(0),y_0(0),0)]^{\frac{1}{2}}\left[1-e^{\int_0^{T_0}(P_{0x}+Q_{0y})dt}\right]}{\int_0^{T_0} e^{\int_0^t(P_{0x}+Q_{0y})dt}(P_0^2+Q_0^2)\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right|_{L_0;\,\alpha=0}dt}. \tag{37$'$}$$

(37)$'$ 最早为 Duff 得到。

对于多重极限环或复合极限环 $L_0$，若 $\Psi_\alpha(0,0)=0$，则当 $\alpha$ 变动时它是否消失，有待进一步研究；不过可证：

**定理 6.** 若 $\Psi(0,\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时不取得极值，则当 $\alpha$ 变动时极限环 $L_0$ 不消失；又若 $L_0$ 为 $k$ 重极限环，则当 $|\alpha|$ 充分小时，方程(1)在其邻近的极限环个数不超过 $k$[1)]；若有 $\dfrac{\partial^i\Psi(0,0)}{\partial\alpha^i}=0\ (i=1,2,\cdots,k-1)$，$\dfrac{\partial^k\Psi(0,0)}{\partial\alpha^k}\neq0$，则在 $L_0$ 的充分小邻域内的任一点不可能有方程(1)的(相应于绝对值充分小的参数的)多于 $k$ 个极限环通过它。

证. 由于 $\Psi(0,\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 不取得极值，故对任一 $\varepsilon>0$，必有 $\alpha_1,\alpha_2$ 满足

$$\Psi(0,\alpha_1)<0<\Psi(0,\alpha_2),\quad |\alpha_i|<\varepsilon,\quad i=1,2,$$

从而又知存在 $\delta>0$，使当 $|n_0|<\delta$ 时，就有

$$\Psi(n_0,\alpha_1)<0<\Psi(n_0,\alpha_2),$$

因此，对任一固定的 $|n_0|<\delta$，至少有一 $\alpha$ 与之对应，使 $\Psi(n_0,\alpha)=0$；这表明曲线坐标为 $(0,n_0)$ ($|n_0|<\delta$) 的任一点至少有方程(1)的相应于某一参数的极限环通过它[2)]。

若存在 $\alpha_i\to0\ (i=1,2,\cdots)$，使当 $\alpha=\alpha_i$ 时，方程(1)在 $L_0$ 邻近的极限环个数不少于 $k+1$，即对每一 $\alpha_i$ 至少有 $k+1$ 个数 $n_i^j\ (j=1,2,\cdots,k+1)$ 存在，使 $\Psi(n_i^j,\alpha_i)=0\ (j=1,\cdots,k+1)$，因而至少有 $n(\alpha_i)$ 使

$$\frac{\partial^k}{\partial n_0^k}\Psi(n_0,\alpha_i)|_{n_0=n(\alpha_i)}=0.$$

在上式中对 $\alpha_i$ 取极限即得 $\dfrac{\partial^k}{\partial n_0^k}\Psi(n_0,0)=0$，与 $L_0$ 是 $k$ 重环的假设矛盾。用同样的方法可

1) 这一结论最早为 A. A. Андронов 等得到。

2) 同理可证：若 $\Psi(n_0,0)$ 在 $n_0=0$ 时不取得极值，则 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 也不消失。

证定理的第三部分，从略。

最后，再考虑 $L_0$ 位于周期环 $L_0^h$ 中的情形。任取$L_0^h$的一横截线

$$\Gamma:\quad x=\bar{x}(h),\quad y=\bar{y}(h) \tag{38}$$

其中 $h$ 为参数，当 $h$ 固定时 $(\bar{x}(h),\ \bar{y}(h))$，为 $\Gamma$ 与 $L_0^h$ 的交点．以 $L_0^h$ 的弧长 $s$ 为参数，将 $L_0^h$的方程改写为

$$\left.\begin{aligned}
&L_0^h:\ x=\varphi(s,h),\quad y=\phi(s,h),\\
&L_0:\ x=\varphi(s,0)=\varphi(s),\quad y=\phi(s,0)=\phi(s),\\
&\qquad \varphi(0,h)=\bar{x}(h),\quad \phi(0,h)=\bar{y}(h).
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

假设 $L_0^h$ 都是负定向的，取外法线方向为正，作依赖于参数 $h$ 的坐标变换

$$x=\varphi(s,h)-n\phi'(s,h),\quad y=\phi(s,h)+n\varphi'(s,h), \tag{40}$$

其中 $n$ 为过 $(\varphi(s,h),\ \phi(s,h))$ 的 $L_0^h$ 的法线长．以(40)代入(1)得

$$\frac{dn}{ds}=F(s,n,\alpha,h). \tag{41}$$

$F(s,n,\alpha,h)$ 可由(22)以 $\varphi(s,h)$ 代 $\varphi(s)$，$\phi(s,h)$ 代 $\phi(s)$ 得出．以 $n=n(s,n_0,\alpha,h)$ 记(41)的当 $s=0$ 时 $n=n_0$ 的解($\alpha$，$h$ 看作参数)，又以 $l_h$ 记 $L_0^h$ 的长度．考虑函数

$$\Psi(n_0,\alpha,h)=n(l_h,n_0,\alpha,h)-n_0=\int_0^{l_h}F(s,n,\alpha,h)ds. \tag{42}$$

则应有

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha(0,0,h)&=e^{\int_0^{l_h}H(s;h)ds}\int_0^{l_h}e^{-\int_0^s H(s;h)ds}\left.\frac{\partial\theta(s,h)}{\partial\alpha}\right|_{L_0^h;\alpha=0}ds=\\
&=\int_0^{l_h}e^{-\int_0^s H(s;h)ds}\left.\frac{\partial\theta(s,h)}{\partial\alpha}\right|_{L_0^h;\alpha=0}ds,
\end{aligned} \tag{43}$$

其中 $H(s,h)$，$\dfrac{\partial\theta(s,h)}{\partial\alpha}$ 可分别在 $H(s)$，$\dfrac{\partial\theta(s)}{\partial\alpha}$ 中以 $\varphi(s,h)$ 代 $\varphi(s)$，$\phi(s,h)$ 代 $\phi(s)$ 得到．若回到自变量 $t$，则示见 $\Psi_\alpha(0,0,h)$ 与定理 2 中所引进的 $\mathfrak{C}(h)$ 是相同的。

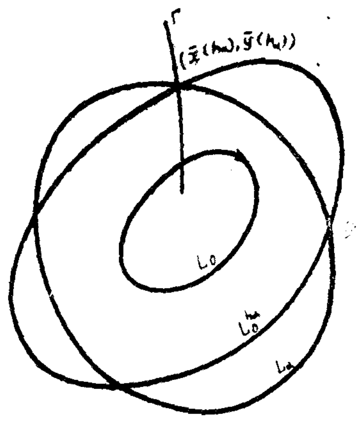



图 3

若在 $L_0$ 附近(1)有周期解 $L_\alpha$，则必有一 $h_\alpha$ 存在，使 $\Psi(0,\alpha,h_\alpha)=0$.

事实上，设 $\Gamma$ 与 $L_\alpha$ 的交点为 $(\bar{x}(h_\alpha),\ \bar{y}(h_\alpha))$，则由于 $L_\alpha$ 为过 $(\varphi(0,h_\alpha),\ \phi(0,h_\alpha))$，即 $(\bar{x}(h_\alpha),\ \bar{y}(h_\alpha))$ 的周期解，故必有

$$\Psi(0,\alpha,h_\alpha)=0.$$

因此，讨论方程 (1) 的周期解的存在性问题就归结为讨论 $\Psi(0,\alpha,h)=0$ 的解的存在性问题。今设

$$\Psi(0,\alpha,h)=\frac{\alpha^n}{n!}\left[A_n(h)+\alpha\bar{A}_{n+1}(h,\alpha)\right],$$

其中 $A_n(h)$ 为第一个使 $\left.\dfrac{\partial^k\Psi(0,\alpha,h)}{\partial\alpha^k}\right|_{\alpha=0}$ 不恒等于 0 的导数，由于 $\Psi(0,0,h)\equiv 0$，因而 $n\geqslant 1$.

**定理 7.** 设 $L_0$ 位于周期环 $L_0^h$ 中，则有下列结论成立：

1° 若 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失，则必有 $A_n(0)=0$；

2° 若 $A_n(0)=0$，$A_n(h)$ 在 $h=0$ 不取得极值，则当 $\alpha$ 变动时 $L_0$ 不消失；

3° 若 $A_n(0)=A_n'(0)=\cdots=A_n^{(k-1)}(0)=0$，$A_n^{(k)}(0)\neq 0$，则当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时，在 $L_0$ 邻近方程(1)不存在多于 $k$ 个极限环；

4° 若 $h_1<h_2$ 时，$L_0^{h_1}$ 位于 $L_0^{h_2}$ 的内侧，$A_n(0)=0$，$A_n'(0)\neq 0$，则在 $L_0$ 邻近方程(1)的唯一极限环为稳定或不稳定由 $\alpha^n A_n'(0)<0$ 或 $>0$ 决定；若 $h_1<h_2$ 时 $L_0^{h_1}$ 位于 $L_0^{h_2}$ 的外侧，则稳定或不稳定由 $\alpha^n A_n'(0)>0$ 或 $<0$ 决定。

证. 1° 若 $A_n(0)\neq 0$，则当 $|h|$ 及 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时就有 $\Psi(0,\alpha,h)=\dfrac{\alpha^n}{n!}[A_n(h)+\alpha\bar{A}_{n+1}(h,\alpha)]\neq 0$，这表明当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时，方程(1) 在 $L_0$ 邻近无周期解。

2° 由于 $A_n(0)=0$，$A_n(h)$ 在 $h=0$ 不取得极值，故对任一 $\varepsilon>0$，必存在 $h_1<h_2$，$|h_i|<\varepsilon(i=1,2)$，使 $A_n(h_1)\cdot A_n(h_2)<0$。不妨设 $A_n(h_1)<0$，因而必存在 $\delta>0$，使当 $|\alpha|<\delta$ 时有 $n!\alpha^{-n}\Psi(0,\alpha,h_1)=\bar{A}_n(h_1)+\alpha A_{n+1}(h_1,\alpha)<0$，而 $n!\alpha^{-n}\Psi(0,\alpha,h_2)=A_n(h_2)+\alpha\bar{A}_{n+1}(h_2,\alpha)>0$；所以，对任一固定的 $|\alpha|<\delta$，至少有一 $h_\alpha$ 使 $\Psi(0,\alpha,h_\alpha)=0$，$h_1<h_\alpha<h_2$，即方程(1)当 $|\alpha|<\delta$ 时在 $L_0$ 邻近（$|h|<\varepsilon$）存在周期解。

3° 若存在 $\alpha_i\to 0$（$i=1,2,\cdots$），使当 $\alpha=\alpha_i$ 时，方程（1）在 $L_0$ 邻近至少有 $k+1$ 个极限环，则必有 $h_i^j(j=1,2,\cdots,k+1)$ 存在，使

$$n!\alpha^{-n}\Psi(0,\alpha_i,h_i^j)=A_n(h_i^j)+\alpha_i\bar{A}_{n+1}(h\ \ ,\alpha_i)=0,\quad j=1,\cdots,k+1.$$

因而必存在 $\bar{h}_i$ 使

$$\frac{d^k}{dh^k}[n!\alpha^{-n}\Psi(0,\alpha_i,h)]_{h=\bar{h}_i}=0.$$

即

$$A_n^{(k)}(\bar{h}_i(+\alpha_i\left\{\frac{d^k}{dh^k}\bar{A}_{n+1}(h,\alpha_i)\right\}_{h=\bar{h}_i}=0. \tag{44}$$

在上式中命 $\alpha_i\to 0$，即得 $A^{(k)}(0)=0$，与假设矛盾。

4° 设 $n$ 为奇数，$A_n'(0)>0$，$\alpha<0$ 则有 $h_1<0<h_2$ 使

$$A_n(h_1)<0<A_n(h_2).$$

因而当 $\alpha<0$ 而其绝对值充分小时就有

$$\Psi(0,\alpha,h_1)=\frac{\alpha^n}{n!}[A_n(h_1)+\alpha\bar{A}_{n+1}(h_1,\alpha)]>0.$$

这表明自 $M_1(\bar{x}(h_1),\bar{y}(h_1)$ 出发的方程(1)的轨线 $L_\alpha(M_1)$ 与 $L_0^{h_1}$ 的过 $M_1$ 的法线的次一交点 $M_1'$ 必位于 $L_0^{h_1}$ 的外侧；同理，由 $\Psi(0,\alpha,h_2)<0$ 知方程（1）的过 $M_2(\bar{x}(h_2),\bar{y}(h_2))$ 的轨线 $L_\alpha(M_2)$ 与 $L_0^{h_2}$ 过 $M_2$ 的法线段的次一交点 $M_2'$ 位于 $L_0^{h_2}$ 的内侧。从而知，此时当 $\alpha<0$ 且其绝对值充分小时，方程（1）在 $L_0$ 邻近的唯一极限环是稳定的。其他情况的证明类似。

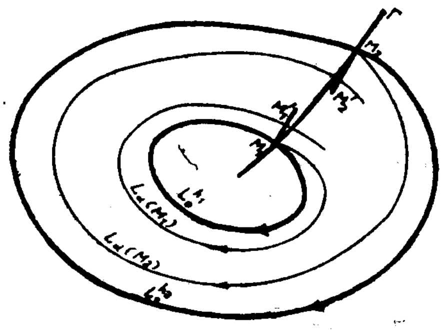


图 4

**附注**．从定理 7 的证明过程中可见，若

$$A_n(0)=A'_n(0)=\cdots=A_n^{(k-1)}(0)=0,\quad A^{(k)}(0)\neq 0,\quad k\text{ 为奇数},$$

当 $h_1<h_2$ 时 $L_0^{h_1}$ 位于$K_0^{h_2}$的内侧，又若 $\alpha^n A_n^{(k)}(0)<0\ (>0)$，则当$|\alpha|\neq 0$ 充分小时，方程(1) 在 $L_0$ 邻近至少存在一个稳定（不稳定）极限环．

**推论 7.1.** 若 $A_1(0)=0$，$A_1'(0)\neq 0$，则当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时，方程(1)在 $L_0$ 邻近存在唯一极限环．

由于 $A_1(h)=\Psi_\alpha(0,0,h)=\mathcal{C}(h)$，因此就得到了 Малкин 的结果．

**推论 7.2.** 考虑近似 Hamilton 系统

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}+p(x,y,\alpha),\ \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x}+q(x,y,\alpha),\\&\qquad p(x,y,0)=q(x,y,0)=0.\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

当 $\alpha=0$ 时，(45) 有周期环 $H(x,y)=h$，以 $x=\bar{x}(h)$，$y=\bar{y}(h)$ 记其横截线方程，则由(32)′ 容易看出

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}_{\substack{x=\bar{x}(h)\\y=\bar{y}(h)}}\Psi_\alpha(0,0,h)=\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}_{\substack{x=\bar{x}(h)\\y=\bar{y}(h)}}A_1(h)=\\&=\int_0^{T_0^h}\left[\frac{\partial p(x,y,0)}{\partial\alpha}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial q(x,y,0)}{\partial\alpha}\frac{\partial H}{\partial y}\right]_{L_0^h}dt=\\&=\int_{L_0^h}\frac{\partial p(x,y,0)}{\partial\alpha}dy-\frac{\partial q(x,y,0)}{\partial\alpha}dx=\\&=\iint\limits_{D_h}\left[\frac{\partial^2 p(x,y,0)}{\partial x\partial\alpha}+\frac{\partial^2 q(x,y,0)}{\partial y\partial\alpha}\right]dxdy,\end{aligned}\tag{46}$$

其中 $D_h$ 为 $L_0^h$ 所界定的区域．今记

$$\Phi(h)=\iint\limits_{D_h}\left[\frac{\partial^2 p(x,y,0)}{\partial x\partial\alpha}+\frac{\partial^2 q(x,y,0)}{\partial y\partial\alpha}\right]dxdy.$$

由于 $\Psi(0,\alpha,h)=0$ 与 $\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}_{\substack{x=\bar{x}(h)\\y=\bar{y}(h)}}\Psi(0,\alpha,h)=0$ 的解是一致的，因此以 $\Phi(h)$ 代替 $A_1(h)$ 时仍可应用定理 7，从而立即得到 Л. С. Понтрягин[7] 与张芷芬[18] 的结果[1)]：

若 $\Phi(h_0)=0$，$\Phi'(h_0)\neq 0$，则当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时，在 $H(x,y)=h_0$ 的邻近方程 (45) 存在唯一的极限环（Л. С. Понтрягин 的结果）．若 $\Phi(h_0)=\Phi'(h_0)=\cdots=\Phi^{(k-1)}(h_0)=0$，$\Phi^{(k)}(h_0)\neq 0$．则当 $|\alpha|\neq 0$ 充分小时，方程(45)在 $H(x,y)=h_0$ 邻近不出现多于 $k$ 个极限环(张芷芬的结果)．

应该说本文所讨论的还只是一些比较简单的情况，所遗留下来的问题很多；例如当参数变动时周期环的不消失问题．显然，周期环不消失的充要条件是：当 $|\alpha|$，$|h|$ 充分小时，有 $\Psi(0,\alpha,h)\equiv 0$．因此在一般情况下这一判定问题是很复杂的，它与焦点与中心的问题类似，须要考虑无限多个条件．

---

1）作者没有能见到这些结果的证明．