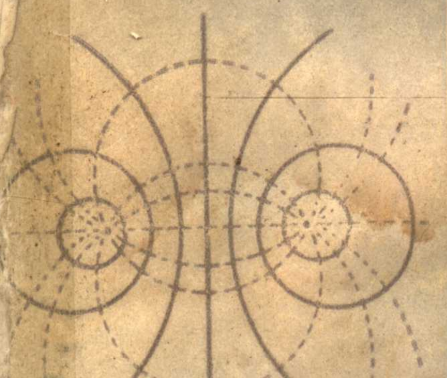
电动力学解题指导



高等院校理论物理解题指导丛书

内 容 提 要

本书是高等院校理论物理解题指导丛书中的一本。全书分为十四章。为了方便读者学习，第一章专门介绍了与电动力学有关的数学知识。第二至第十四章，选有稳恒电场、稳恒磁场、电磁场、平面电磁波和波的传播、波导和谐振腔、电磁波的辐射、狭义相对论、相对论电动力学、相对论力学、带电粒子和电磁场方面的各种题目五百四十多道。书末附有电动力学中常用的数学公式、国际单位制和高斯单位制的各种换算表，以便读者查阅。

本书适合高等院校理工科有关专业师生使用，也可供自学青年参考。

高等院校理论物理解题指导丛书
电动力学解题指导
黄长春 刘新芽编
江西科学技术出版社出版
（南昌市新魏路）
江西省新华书店发行 江西新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 26.25 字数 60万
1987 年 11 月第 1 版 1987 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—3 010
ISBN 7—5390—0055—4/G·2
统一书号：7425·19 定价：4.40 元

前　言

理论物理是高等院校理工科的必修课。它的任务是，建立各种物理量之间的关系，找出反映客观世界的物理规律。在当代的物理学中，人们正在致力于太空奥秘和物质结构更深层次的探索，因而理论物理学的有关思想和方法得到了非常广泛的运用。但是，不少人在学习理论物理的过程中，感到其理论深奥难懂，解答问题亦较困难。为了适应我国四化建设的需要，有助于广大师生和有关人员的学习，江西科学技术出版社组织编写了这套“高等院校理论物理解题指导丛书”。

这套丛书共包括《理论力学解题指导》、《热力学解题指导》、《统计物理学解题指导》、《电动力学解题指导》和《量子力学解题指导》五本。

这套丛书的选题原则是，以加强基本训练为主，也适当搜集一些难度较大的、反映现代科学技术内容的新题目，以适应不同读者的需要。其编写方式是，每本书的各章均包括以下四部分：一、本章解题所需要的重要概念和关系式；二、具有题意分析、解题思路、解题方法的典型例题，其中部分例题做了简要说明和讨论，指明了解题时容易出现的错误，提出了判断解答正误的方法；三、仅有简单演算或证明过程的题解；四、供读者自己练习的计算或求证习题，其中计算习题附有答案。

《电动力学解题指导》全书分为十四章，共有电动力学方面的各种题目五百四十多道。

本书适合综合性大学、高等师范院校、部分理工科院校等有关专业的广大师生使用，也可供电视大学、业余大学、进修

学院有关专业师生和自学青年参考。

本书由黄长春、刘新芽同志编写。全部书稿承上海师范学院物理系阙仲元教授审阅，在此表示由衷的谢意。

由于时间仓促和我们业务水平所限，错误和欠妥之处一定难免，诚恳地希望广大读者批评指正。

编　　者

1984年12月

目　录

第一章　数学预备知识

电动力学是以电磁场的基本属性，它的运动规律以及它和带电物质之间的相互作用为研究对象。对于这些问题的研究，通常是通过电荷和电流的场来进行的。但是，对于场的处理，往往要涉及到比较广泛而复杂的数学知识。因此，在着手学习这一学科时，从一开始，就得把处理场论的数学方法彻底弄通，并熟练地掌握它。顺便指出，场的概念和处理场的问题的基本数学方法，不仅对电磁理论，而且对现代物理的各个方面，都是非常重要的。基于这一原因，我们首先简要地介绍了学习电动力学这门学科必备的一些数学基础知识。例如：矢量运算与矢量分析，坐标变换，张量初步，微分方程及其解法，矩阵运算，δ 函数等。由于篇幅所限，有些内容以附录形式列出。

一、矢量代数与矢量分析

描述电磁现象正如描述其他物理现象一样，通常需要引入一些重要的物理量。这些物理量，按其本身的性质来分，一般有标量、矢量和张量。

在物理学中，有些物理量只由一个数就可完全确定其物理意义。这类物理量，我们称它为标量，例如质量、温度、电荷等。一般来说，标量的值亦有正、负之别。另一类物理量，不仅有大小，而且有方向。这类物理量称为矢量，例如位移、速度、加速度、力、电场强度、电流密度、磁感应强度、磁矢势

等。此外，还有一类物理量能显示出更为复杂的空间取向性质，称为张量。在本课程中常用的是二阶张量。例如电四极矩张量、电磁场应力张量等。

严格来说，具有确定物理意义的标量、矢量和张量的区分，是根据它们在空间坐标变换下的性质来定义的。某些物理量，如果当坐标系转动时保持不变，即$a'=a$，即此量称为标量。某些物理量，如果当坐标系转动时，它的三个分量的变换关系与坐标变换关系相同，则这类物理量称为矢量。其变换关系为：

$$A'_i=a_{ij}A_j \qquad (i,\ j=1,2,3)$$

式中下标j，表示要对该指标求和。为了书写简便起见，我们已略去求和符号。还有一类物理量由九个数值来确定。也就是当坐标系转动时，其分量按以下方式变换：

$$F'_{ij}=a_{ii'}a_{jj'}F_{i'j'}$$

具有这一变换关系的物理量称为二阶张量。在一般情况下，

$$F'_{ijk\cdots\cdots n}=a_{ii'}a_{jj'}a_{kk'}\cdots a_{nn'}F_{i'j'k'\cdots n'}$$

在这个等式中，若有n个下标，就称为n阶张量。上两式中的求和符号，我们均已省略。

空间坐标变换，除了坐标系的转动之外，还有空间坐标系的平移和坐标系的反演变换（即按$x'=-x$，$y'=-y$，$z'=-z$变换），或由右手坐标系变为左手坐标系。反之亦然。

如果一个物理量，当坐标系转动时保持不变，当坐标反演时亦保持不变，则这个物理量就称为真标量，简称标量。如果当坐标系转动时虽然保持不变，但当坐标系反演时却改变符号，则这个物理量就称为赝标量。同理，如果当坐标系转动时按矢量变换关系变换的物理量，当坐标系反演时，矢量的各个分量都改变符号，则该矢量称为真矢量，或称极矢量，或简称矢量。

而若矢量的各个分量在坐标反演时不改变符号，则该矢量称为赝矢量或轴矢量。如果一个n阶张量，当坐标系转动时按张量变换关系变换，而当坐标系反演时，它的各个分量都乘上$(-1)^n$，则这个张量就简称张量。如果张量的各分量都乘上$(-1)^{n+1}$，则称它为赝张量。关于物理量的这些性质，我们将在本书有关部分予以介绍。

1．矢量与矢量表示方法

矢量是一个既有大小，又有方向的物理量。我们以一个质点的位移来说明矢量的特征。例如，一个质点从空间某点o出发，经过一个任意的路径移动到空间另一点P（如图1—1所示），其运动的净效应，正如假定该质点从o点沿直线S按箭头所示方向运动至P点一样。这条直线S就称为质点的位移。直线的长度表示位移的数值，箭头所示方向表示位移的方向，所以说位移是一个矢量。在数学上，任何矢量都具有象位移这个矢量一样的性质。

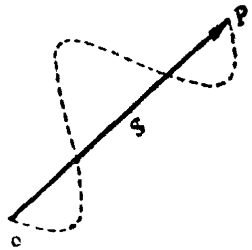


图1—1

矢量既可以用图示法表示，也可以用坐标法表示。在图示法中，矢量$\vec{A}$用一个带箭头的线段来表示，其长度表示$\vec{A}$的大小，箭头表示矢量$\vec{A}$的方向，如图1—2所示。

图1—2

矢量符号在书写时也有一些特殊的规定，譬如，一个标量A通常用普通的铅字印刷，而矢量则用黑体铅字$\mathbf{A}$来表示，或者用带有箭头的铅字$\vec{A}$来表示，或者用带箭头的线段$\overrightarrow{OA}$表示。

矢量$\mathbf{A}$的数值称为矢量的模。通常用$|\mathbf{A}|$或A，或$|OA|$等来表示。

一个矢量$\mathbf{A}$若除以本身的绝对值$|\mathbf{A}|$，所得的一个新矢量称为单位矢，其方向与矢量$\mathbf{A}$的方向相同。它是一个无量纲的量，其值等于1，通常记为

$$\hat{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\text{或}\frac{\mathbf{A}}{A}$$

式中$|\mathbf{A}|=A=\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$

由于矢量是一个由带箭头的直线段表示的物理量，所以矢量的平移决不会改变矢量本身的性质。因此，一个矢量的图形可以自由平移。如有必要，可以把几个矢量分别平移到由同一点出发，然后进行矢量的几何运算。

2。矢量的加法、减法和数乘

（1）矢量的相等：如果两个矢量$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$大小相等（模相等）、平行且同向，那么，这两个矢量就彼此几何地相等，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \tag{1}$$

注意，在这个定义里，并不要求两个矢量从同一点出发。

（2）矢量加法：仍以质点的位移为例。假设一个质点，

首先从 o 点出发沿直线A移动到 a 点，然后由 a 点沿直线B移动到 b 点，从图1—3可以看出，这一效果与质点从 o 点经过

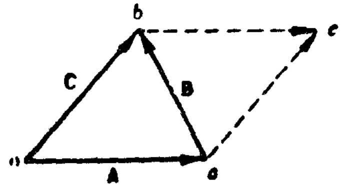


图1—3

简单的位移C移动到 b 点是等价的。位移C就称为A和B的合位移，或者说是两个相继的位移A和B的矢量和

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B} \qquad (2)$$

它们的几何关系，正是三角形的三个边。矢量的这一合成法，称为矢量加法的三角形法则。

按照上述规则，取B加A，可以得到同一矢量，如图1—4所示，即

$$\mathbf{C}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad (3)$$

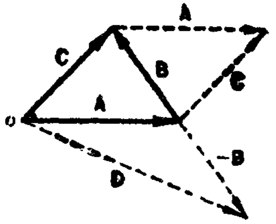


图1—4

根据上述结果，显然

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad (4)$$

这就是说，矢量相加的顺序不影响其和。所以说，矢量的加法

满足交换律。

按照上述规律，不难证明矢量的加法也满足结合律，即

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{C})+\mathbf{B} \qquad (5)$$

等等。这就是说，计算三个和三个以上的矢量之和时，其结合方式并不影响最后的结果。

（3）矢量减法：两个矢量相减，例如$\mathbf{A}$减$\mathbf{B}$，我们可以用加法来完成，即相当于在矢量$\mathbf{A}$上加以矢量$-\mathbf{B}$，可得一新矢量$\mathbf{D}$，如图1—4所示，即

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}) \qquad (6)$$

（4）零矢量：若矢量的模为零，则谈不上有方向，于是在图形上便退缩为一点。这种矢量称为零矢量，显然

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0 \qquad (7)$$

或

$$\mathbf{A}-\mathbf{A}=0 \qquad (8)$$

如图1—5所示。

图1—5

（5）矢量的数乘：若一矢量$\mathbf{A}$和一个数n相乘，称为矢量的数乘。它的积可以写成$n\mathbf{A}$也可写成$\mathbf{A}n$，也就是n个矢量$\mathbf{A}$之和，其方向与$\mathbf{A}$的方向有关。如果$n>0$，其方向与$\mathbf{A}$的方向相同。若$n<0$，则与矢量$\mathbf{A}$原来的方向相反。所以$\mathbf{A}$与n之积定义一个新矢量$\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{B}=n\mathbf{A} \qquad (9)$$

其数值关系为

$$|\mathbf{B}|=|n|\,|\mathbf{A}| \qquad (10)$$

即$\mathbf{B}$之大小为$\mathbf{A}$的大小的n倍。

矢量的数乘，一般有下列两种情况：

$$(n+m)\mathbf{A}=n\mathbf{A}+m\mathbf{A} \qquad (11)$$

$$n(\mathbf{A}+\mathbf{B})=n\mathbf{A}+n\mathbf{B} \tag{12}$$

上式表明，矢量的数乘满足分配律。

（6）两矢量的点乘：两矢量**A**和**B**的点乘定义为

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta$$

式中θ为两矢量**A**、**B**之间的小于180°的那个夹角。**A**点乘**B**可以视为**B**在**A**方向的投影乘以**A**的值。反之亦然，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=B_A|\mathbf{A}|,\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=A_B|\mathbf{B}| \tag{13}$$

或
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_B|\mathbf{B}|,\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=B_A|\mathbf{A}| \tag{14}$$

显然
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \tag{15}$$

A与**B**点乘的顺序，不改变它们的标积。此外，

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \tag{16}$$

假定两个矢量**A**、**B**相互垂直，则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0 \tag{17}$$

反之，若两矢量（非零矢量）的标积为0，则它们相互垂直。

一个矢量的平方可理解为这个矢量与自身的点乘，其结果就是它自身数值的平方，即

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A^2 \tag{18}$$

如果两矢量点乘后再数乘，则

$$m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=m\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \tag{19}$$

满足结合律。

（7）两矢量的叉积：若有两个矢量**A**和**B**，它们之间的夹角为θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），这两矢量的叉积定义为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(AB\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{n}} \tag{20}$$

以**C**记之，则

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(AB\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{n}} \tag{21}$$

通常又称为矢积或外积。它是一个既垂直于**A**又垂于**B**的矢量，

C的方向由右手螺旋法则从**A**转向**B**螺旋前进的方向$\hat{n}$来确定，如图1—6所示。

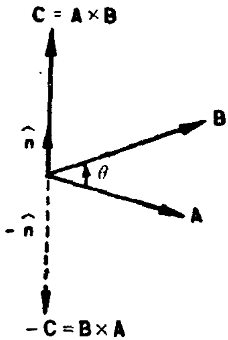


图1—6

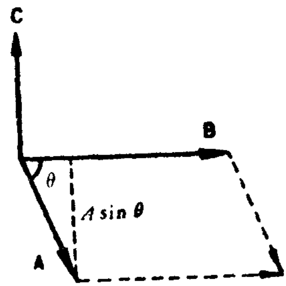


图1—7

C的值为

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}| \sin\theta \qquad (22)$$

从图1—7可以看出，两矢量**A**、**B**矢积的数值等于以**A**和**B**为边的平行四边形的面积。

根据矢积方向的定义，显然两矢量叉乘时的顺序是很重要的。从图1—6中可以看出

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad (23)$$

由此可见，两矢量的叉积不满足交换律。

若**A**、**B**两矢量平行，则

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \qquad (24)$$

显然有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \qquad (25)$$

此外，矢量积的运算还满足

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \qquad (26)$$

及

$$m\mathbf{A} \times n\mathbf{B} = mn(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad (27)$$