

高中数学教案

本社编



平面解析几何

北京师范大学出版社

高中数学教案

平面解析几何

本社编

北京师范大学出版社

责任编辑 潘淑琴

高中数学教案

平面解析几何

本社编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

交通出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.5 字数：241 千

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数：1—19 000

ISBN7—303—00032—1/G·30

统一书号：7243·556 定价：2.45元

前 言

1984年我社编辑出版了《中学数学教材研究与教案选》(共六册),旨在将广大中学数学教师多年来积累的教学经验在全国范围内进行交流和推广。实践证明,这种做法得到全国各地广大中学数学教师的欢迎。它对于开展中学数学教学研究,提高教学质量起到了促进作用。

教育正改革,教学方法也在发展,同时不少中学数学教师使用《中学数学教材研究与教案选》中也给我们提出了很好的意见和建议,这些促使我们进行修订。这次修订改名为《初中教案》(包括代数一——四册、平面几何一、二册)和《高中数学教案》(包括代数一、二、三册、立体几何、平面解析几何及微积分初步)。这次修订仍然保持原书的优点,同时在以下三方面加以完善和补充,首先,力图使大多数教案在深度和份量方面对大多数学校的教学是切实可行的;其次,在教案中尽可能体现开发学生智力和培养学生的能力;第三,增加教案的数量,每章末配有复习课教案。

本书的特点是:(1)教案的作者仍然是全国范围内部分有经验的数学教师,其中有不少特级教师。(2)本书依据国家颁布的中学数学教学大纲的教学体系,结合现行中学数学教材编写。(3)本书的目的在于研究如何通过课堂教学,使学生掌握基础知识,基本技能技巧以及发展学生思维、开发学生智力、培养学生能力。(4)本书每章开头有一篇教材分析或教学经验方面的文章,概括本章主要内容及其在中学数学中

的地位和作用；教学目的和要求，重点和难点，并且提出教学建议和课时安排。（5）教案中一般是由教学目的和要求、教学重点和难点、教学过程（包括新课引入、新课、小结、作业）等组成。多数教案比较详尽，从中可以看到作者课堂教学的全过程。少数教案较略，但言简意明，脉络清楚、重点突出，有的同一教学内容附有两个不同特色的教案。

本册由北京教育学院崇文分院乔家瑞同志组织定稿。

感谢北京师范大学数学系曹才翰先生对本书编辑出版的关心支持。

对本书有什么意见和要求，希望广大读者来信告诉我们。

编者

目 录

直线	1
教材分析	1
有向线段	7
两点间的距离	11
线段的定比分点 (一)	16
线段的定比分点 (二)	21
直线的倾斜角与斜率	26
直线方程的点斜式和斜截式	32
直线方程的两点式和截距式	38
直线方程的一般形式	44
两条直线的平行与垂直	51
两条直线的夹角	56
两条直线的交点	61
点到直线的距离	68
复习课 (一)	74
复习课 (二)	80
圆锥曲线	83
教材分析	83
曲线和方程	91
求曲线的方程 (一)	96
求曲线的方程 (二)	100
充要条件	102
曲线的交点	108
圆的标准方程	111

圆的一般方程	115
圆的习题课	119
椭圆的定义和标准方程	123
椭圆图形的画法及直线与椭圆的位置	127
椭圆的几何性质 (一)	131
椭圆的几何性质 (二)	135
双曲线的定义和标准方程	140
双曲线的性质 (一)	144
双曲线的性质 (二)	150
双曲线的第二定义	156
抛物线的定义和标准方程	162
抛物线的几何画法	166
抛物线的几何性质	171
圆锥曲线的切线和法线 (一)	176
圆锥曲线的切线和法线 (二)	184
复习课 (一)	191
复习课 (二)	199
复习课 (三)	209
坐标变换	219
教材分析	219
坐标轴的平移	223
利用坐标轴的平移化简二元二次方程	227
坐标轴的旋转	231
利用坐标轴的旋转化简二元二次方程	235
参数方程 极坐标	240
教材分析	240
曲线的参数方程及其求法	246
参数方程的曲线及其作图	251
参数方程与普通方程的互化	257

直线和圆锥曲线的参数方程的应用.....	268
利用参数求曲线的方程.....	270
求与曲线系有关的轨迹方程.....	277
极坐标系.....	284
曲线的极坐标方程.....	289
三种圆锥曲线的统一的极坐标方程.....	294
极坐标与直角坐标的互化.....	299
等速螺线.....	304
复习课(一).....	309
复习课(二).....	316
复习课(三).....	320
总复习.....	326
直线.....	326
圆.....	332
圆锥曲线.....	338
参数方程与极坐标(一).....	344
参数方程与极坐标(二).....	350

直 线

教 材 分 析

解析几何是在坐标系的基础上，用代数方法研究几何问题的一门数学学科。平面解析几何研究的主要问题是：（1）根据已知条件求出表示平面曲线的方程；（2）通过方程，研究平面曲线的性质，并作出曲线的图形。简单地讲就是要掌握形、数结合的研究方法，通过对数量关系的研究来刻画几何图形的位置关系及其性质。这是学习解析几何应掌握的基本思想。

一、分析知识联系，把握教学重点

要把“形”转化为“数”的问题，首先就是要会“翻译”。即把图形问题“翻译”成方程问题。因此必须掌握进行“翻译”工作的基本“词汇”和“语法”。这就是在初中学习直角坐标系，建立平面上的点和坐标——有序实数对的一一对应关系；在此基础上，进一步学习有向线段的概念及其数量计算公式、两点间距离公式、线段的定比分点等基本公式。

有了这些基本工具之后，就能研究直线位置的确定和刻画，即建立直线方程的工作。

直线的位置是由直线上一个点和直线的方向确定的。点可以用坐标 (x, y) 表示，直线的方向怎样来刻画呢？为此，引进了直线的倾斜角和斜率的概念。

直线 l 的位置有下面四种情况 (图1-1—图1-4), 斜率 k 是直线倾斜角 α 的正切:

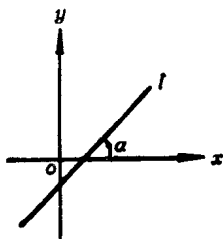


图 1-1

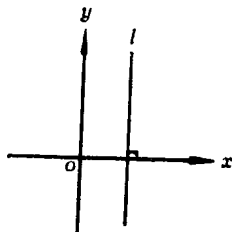


图 1-2

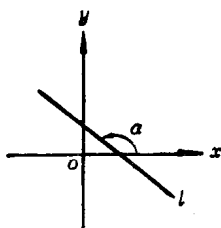


图 1-3

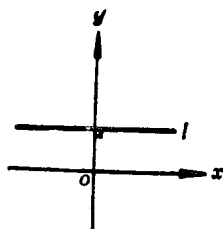


图 1-4

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

它是直线方向的数量刻划. 为了确保直线方向与斜率之间的关系是一一对应, 所以对直线的倾斜角做了如下的规定: 一条直线 l 向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角 α . 当直线 l 与 x 轴平行时, 规定它的倾斜角 $\alpha = 0^\circ$. 因此, α 的取值范围是 $[0^\circ, 180^\circ)$.

根据斜率定义的几何意义和有向线段数量运算公式，便可推得经过点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 的直线 l 的斜率公式：

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

从斜率公式出发，根据直线位置特征的不同情况，推出了直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式。又通过二元一次方程与直线的对应关系，总结出直线方程的一般式。使学生对直线方程的各种形式有一个较全面的认识。

建立直线方程之后，就可以通过对斜率和直线方程系数的讨论来研究直线的位置关系和性质：

1. 直线位置特征：由斜率（或倾斜角）、截距确定；

2. 直线与直线的位置关系：

设直线 l_1 的方程为 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ，斜率为 k_1 。

直线 l_2 的方程为 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ，斜率为 k_2 。

(1) 两直线平行与垂直的判定：

$$l_1 // l_2 \iff A_1B_2 = A_2B_1 \quad \text{即} \quad k_1 = k_2 ;$$

$$l_1 \perp l_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{即} \quad k_1k_2 = -1 .$$

(2) 两直线相交，设交点为 $Q(x_0, y_0)$ ，交角为 θ ，则点 Q 的坐标是方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

的解。交角 θ 满足：

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right| .$$

3. 点和直线的位置关系：

(1) 点 $P(x', y')$ 在直线 $l: Ax + By + C = 0$ 上，

$$\Leftrightarrow Ax' + By' + C = 0$$

(2) 点 $P(x', y')$ 不在直线 l 上, 则点 P 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

另外教材还介绍了二元一次不等式表示的区域以及它在解决实际问题中的应用, 同时还介绍了直线型经验公式. 这两部分都是选学内容.

分析了知识的来龙去脉和内在联系之后, 教材的重点在哪里就清楚了.

本章教材中, 有向线段是一个重要概念, 线段的定比分点 (包括中点) 坐标公式是一个重要的基本公式. 作为概念, 有向线段及其数量运算是理解和推导两点间距离、定比分点、斜率等基本公式的依据和基础, 因此是十分重要的. 至于定比分点坐标公式的重要性, 则体现在今后研究曲线方程中. 它有广泛且重要的应用, 因为研究图形离不开特征点, 确定点的坐标时经常用它. 需要强调的是: 这两个内容不只是重点, 还是本章学习的难点, 这是由于学生在初中学过只考虑长短和位置的线段, 现在第一次接触有向线段, 容易受旧知识的干扰、对含义理解不清楚, 不会正确应用, 对于定比分点, 也有类似情况, 由于不注意方向, 忽略内外比的正负, 造成错误.

本章教材的另一个重点是斜率概念和斜率公式. 因为正确理解斜率的概念, 掌握斜率公式, 是顺利学习直线方程的关键, 它们是推导各种形式直线方程的基础和根据, 所以直线的斜率是一个重要的基本概念, 斜率公式是一个重要的基本公式.

在直线方程的几种形式中，点斜式是重点。因为斜截式是点斜式的特例，两点式是由点斜式导出的，截距式是两点式的特例，所以点斜式是建立其他形式的直线方程的基础，教学中应使学生首先学好直线的点斜式。

二、教学要求与教学建议

直线是简单的几何图形，是研究各种运动方向和位置关系的基本工具。直线方程又是学习圆锥曲线方程和其他知识的基础，在解决许多实际问题中有广泛应用。

直线这一章又是在学生掌握平面直角坐标系、一次函数图象及三角函数的基础上学习的。对于高二的学生来说是容易接受和掌握的。

但是要注意：正是利用教材比较容易接受，我们借此使学生获得解析几何研究问题的基本思想和方法的感性认识。例如教材中说明了在平面直角坐标系中任何一条直线的方程都是二元一次方程；任何一个二元一次方程的曲线都是一条直线，使学生从直观到理论来认识平面上直线与二元一次方程的一一对应关系；在直线点斜式方程的推导中，已运用了由曲线求方程的方法。这些都是为以后进一步学习曲线与方程的对应关系作准备的。

总之，直线这一章，无论从教材内容，还是从教学方法都起着承前启后的作用，务必使学生切实学好，为今后学习打下良好的基础。

具体的教学要求如下：

(1) 正确理解有向线段的概念，掌握两点间的距离公式，有向线段的定比分点和线段的中点坐标公式，并能熟练应用。

(2) 正确理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握斜率

公式和求斜率的方法，掌握各种形式直线方程的推导方法，并能根据条件选择适当的形式熟练地求出直线方程。

(3) 能够利用直线方程讨论两条直线的位置关系、点和直线的位置关系，掌握两条直线平行和垂直的条件，两条直线所成的角和点到直线的距离公式。

从能力上，要使学生了解解析几何的基本思想，初步了解和掌握解析几何研究问题的方法，了解如何用解析法研究几何问题。

根据这一章所处的地位和教学要求，提出以下几点教学建议：

1. 重视“数”“形”结合，充分利用图形直观帮助学生理解概念和字母符号的含义。

2. 加强概念教学，使学生正确理解和应用概念。

如学习“有向线段”概念时注意采用比较法，通过强调与几何中线段的不同点，克服负迁移，加深对“有向”二字的理解；

如倾斜角的规定，要强调为什么要规定直线向上的方向与 x 轴正向所成的最小正角？要注意一般与特殊的关系，注意直线与 x 轴平行的特殊情况。

加强概念教学，还要注意引导学生重视每一概念的符号表示及每一个字母符号的含义和几何意义。

如点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 中， k ， (x_0, y_0) 各表示什么？斜截式方程 $y = kx + b$ 中， k ， b 各表示什么意义等等。

3. 教学中要注意阐述解析几何的基本思想，让学生逐步体会解析几何研究问题的基本方法。

如定比分点公式，斜率公式，直线点斜式方程的推导都要有意识作文章，让学生由浅入深，反复领会。

当然，也不能操之过急，必须有层次的逐步提高。如曲线与方程的对应思想，第一章只是有所接触，做些准备；又如解析法证明几何题，也只是为了让学生了解和熟悉解析法，不宜练习过多，要求过高。

4. 要充分估计学生的水平，十分重视学生能力的培养。许多公式在讲清概念的基础上，可以让学生自己推导。或是在教师的启发下由学生完成。

北京师大二附中 陈俊辉

有 向 线 段

教学目的

使学生理解有向直线、有向线段、有向线段的长度和数量等概念和符号；让学生理解它们的含义，弄清它们之间的联系和区别；使学生初步掌握有向线段数量公式的推导和应用。

教学重点和难点

把有向线段以及它的长度、数量等实质问题作为教学重点。使学生理解并初步掌握，用完全归纳法证明有向线段数量公式的必要性，教会学生全面考察和分析问题，禁忌从片面情况得出全面结论的思想方法是教学的难点。

教学过程

一、复习提问：

1. 在平面几何中的直线和线段有何异同？
2. 平面中的直线和坐标系中的数轴有何异同？

二、新课引入：

过去在平面几何里，对于一条直线，我们只考虑它的位置，而不考虑它的方向，但在解析几何中，常常需要考虑直

线和线段的方向。并为在坐标系的基础上用代数的方法去研究几何的问题作准备。

三、讲解新课：

1. 有向直线 一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中一个方向作为正向，那么相反的方向就是负向，象这样规定了正方向的直线叫做有向直线。在图中，有向直线 l 的正方向用箭头表示（图1-5）。

2. 有向线段 规定了起点和终点的线段叫做有向线段。从起点到终点的方向，就是这条有向线段的方向，在表示有向线段时，规定把起点字母写在前面，把终点字母写在后面，例如 A 是起点， B 是终点，就记做 $\overline{AB}$ （图1-6）。



图 1-5



图 1-6

要决定一条有向线段的方向的正、负需要看这条线段的方向和它所在直线的方向是否一致，如果一致它就是正方向的线段；如果相反它就是负方向的线段。

3. 有向线段的长度 如果不考虑有向线段的方向，只考虑它的长短，就叫有向线段的长度（即有向线段的绝对值）。

有向线段 $\overline{AB}$ 的长度，记作 $|\overline{AB}|$ 。

如果需要掌握有向线段具体的长度，就须事先规定出长度单位。如果设 e 是长度单位，而且通过测量知 $|\overline{AB}|$ 等于 $8e$ ，那么 $|\overline{AB}| = 3$ ，因为有向线段的长度与它的方向无关，所以 $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$ 。

4. 有向线段的数量 一条有向线段的长度，连同表示

它的方向的正、负号，叫做这条有向线段的数量（或数值）。

为了简便，我们把有向线段 $\overline{AB}$ 的数量，记作 AB 。A 是线段的起点，B 是线段的终点。因此，对于任何两条有向线段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的数量，都会有这样的关系： $AB = -BA$ ，即 $AB + BA = 0$ 。

这时向学生提问：在数轴 ox 上，任取两点 A 和 B，（1）从位置关系看有多少种取法？（2）数轴上点 A 的坐标 x_1 实际上代表什么？（3）数轴上点 B 的坐标 x_2 实际上代表什么？

说明：根据上述提问之（1），经过整理归纳把六种情况一一画在黑板上（图1-7）。

根据上述提问之（2），经启发使学生得出点 A 的坐标 x_1 是以原点 O 为起点，A 为终点的有向线段 $\overline{OA}$ 的数量，即 $OA = x_1$ 。然后再启发学生准确地回答出上述提问之（3）。

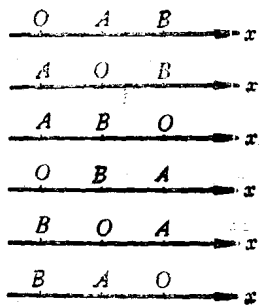


图 1-7

5. 有向线段的数量公式

如果 A、B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2

那么， $AB = x_2 - x_1$ 。

当问题提出之后，教师根据刚才同学们的回答，做如下总结：

设 $\overline{AB}$ 是 x 轴上的任意一条有向线段，那么，就 A、B 两点与 O 都不重合的情形，显然它们的位置关系只可能有上述（图 1-7）六种不同的情况。根据已知，如果 A、B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2 ，那么 $OA = x_1$ ， $OB = x_2$ 是否都满足 $AB = x_2 - x_1$ 呢？