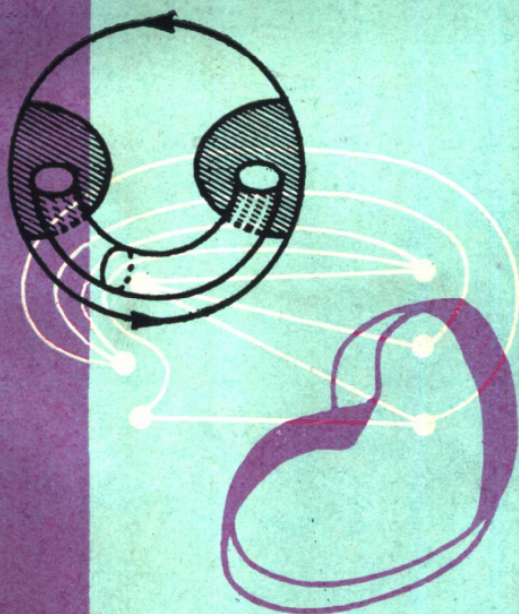


中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

一些不像“几何” 的几何学



上海教育出版社

中学生文库



ZHONGXUESHENG WENKU

一些不像“几何” 的几何学

沈 信 耀

上海教育出版社

责任编辑 王澍边

封面设计 范一辛

中学生文库 一些不像“几何”的几何学

沈 信 耀

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 2.5 插页 2 字数 45,000

1939 年 9 月第 1 版 1989 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—7,900 本

ISBN 7-5320-1459-2/G·991 定价: 0.82 元

写在前面

本书是特意为中学生写的，但也希望具有类似水平的其他数学爱好者喜欢。

初次见到本书的人，一定会对它的书名感到惊讶：怎么会有这么怪的事呢？如果是几何学，怎么可能不像“几何”呢？如果不像“几何”，那又怎么会是几何学呢？

的确，从这个角度讲，本书书名是有点自相矛盾。不过，当你读完本书以后，你就会找到解答的。

为了使大家对这个问题的解答有一个初步的了解，我们在这里想先作一点说明。书名中“不像‘几何’”里的“几何”，指的是我们在中学里学到的那种几何，也就是研究线段、三角形、多边形、圆等的性质的几何学。可是，在现实世界里，还有更多的图形，它们的形状不只由直线或圆周构成。而这种图形，我们将会看到，也是应该研究的；而且，要研究的性质，和“全等”、“相似”等不同。这样，自然就产生通常的“几何”所不能包括的新课题。因此，需要扩大“几何学”的范围，弄清楚“几何学”究竟指什么。

本书将向大家介绍这些。

由于本书的目的之一,是要向大家介绍什么是几何学,并介绍某些实例,所以它和现在一般的课外读物不同,现在常见的课外读物多偏重于数学技巧,而本书将着重于观念的更新。

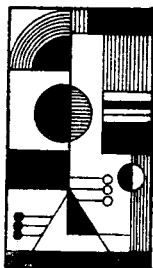
数学和其它科学一样,它的发展离不开观念的更新.从某种意义上说,观念的更新对于发展更具有决定意义.但是,新观念不是凭空产生的.它是在分析、总结、完善已有成果的基础上,自然而然地出现的.几何学作为数学的一个分支,它的发展、它的观念的更新也是如此.我们将通过实例来说明这一点.如果这种说明,能使大家信服,觉得新观念的产生不是不可捉摸的,而且想自觉加以应用,那么我将感极大的荣幸。

作 者

1987年5月于中关村

目 录

一、从“八卦阵”说起.....	1
二、“一笔画”问题.....	9
三、由“图”引起的.....	20
四、什么是几何学.....	31
五、投影几何和对偶原则.....	38
六、非欧几何学.....	47
七、拓扑学.....	57



一、从“八卦阵”说起

《三国演义》里面，有一段讲诸葛孔明摆下“八卦阵”，围困吴将陆逊。此阵利害得很，以致陆逊知难而退。

诸葛孔明的这个“八卦阵”究竟如何，今人不得而知。在一次游园活动中，有人设计、构筑了一个号称“诸葛先生的八卦阵”。此阵是用竹篱笆摆成的，共有八道门。由于竹篱笆筑得和墙一样，挡在面前，所以身在其中，左转右拐，要想顺利走过这八道门并不容易。一时间，也吸引了不少游人前往。其中，青少年占的比例不小。

下面是吴慈中学的苏老师和他的学生小华、小平、小明、小勇的一段对话。

苏老师：“最近在公园里有个‘八卦阵’，你们知道吗？”

众人：“知道。”

“我去过。”小平说。

“我也去过。”小勇补充道。

苏老师：“那你们给介绍介绍。”

苏老师话音刚落，小勇就开了腔：

“行！行！这八卦阵可好玩了。人一进去，就看见一道道的竹篱笆墙挡在两边。你只能在竹篱笆围起的路上走。走着走着，就会有门。据说，这门一共有八道。可是篱笆围起的墙，弯来弯去，走不好，就此路不通，只好碰壁而回了。”

“为了顺利通过这八道门，我可没少走冤枉路，但到头来，还是没走通。”

“真倒霉！”

小平接着说：“我也走了，是挺好玩的。”

“这阵是有八道门，如果你能顺利地通过这八道门，那么你就到达出口。”

“就象小勇说的，这阵是由竹篱笆筑成。由于道路复杂，各个路口看起来又都差不多，再加上一道门套一道门，所以变化很多。人在里面走，稍不注意就会走进死胡同。因此，去的人虽多，但要想顺利通过，可不那么容易。”

小明忙问：“那你走通了吗？”

小平：“开头，我跟着大伙一起，很顺利的通过了一、二道门，可再往下，一方面，人少了，另一方面，大家也在思索，该如何选择前进的方向，所以速度都不快。面对这种情况，我也开动了脑筋。我看着走进死胡同而碰壁回来的人，立刻想到一个主意：我得先把路看清楚了，死胡同不要去。这样既可少走冤枉路，节省体力，又可提高效率。因为目光‘扫描’一次，所费不过数秒。两腿跑一趟，至少也得一、两分钟。所以，自从我悟出了这个‘目测法’以后，别看我时走时停，似乎不快，可实际上，因为我选的路，都是经过

‘目测法’比较以后，认为是活路的路，所以接下去的几道门都让我顺利地通过了。

“眼看着我就要闯过这八道门，来到出口了！”

“可是，越到后来，路越复杂，而且，竹篱笆围出的路，弯度越来越大，用‘目测法’根本看不出多远，所以哪条是死胡同、哪条是活路，不到跟前根本就看不出。急得我满头大汗。再加上七拐八拐，人已经走得够累了。但一想到八道门已经被我过五关、斩六将，闯过了七道，这最后一道，怎么样也要咬咬牙把它拿下来。‘目测法’不灵了，我就用心默记走过的道路，避免重复已经走过的路。这样，一次次的试下来，终于成功了！通向出口的最后一道门让我找到了！”

“真不容易！真不容易！向你表示祝贺。”大家齐声向小平祝贺。

苏老师：“小平为了破这诸葛孔明的‘八卦阵’，还真动了不少脑筋。他既用脑，又不怕往返奔波，终于获得成功。这种既动脑、又讲实干的精神，很值得大家学习。

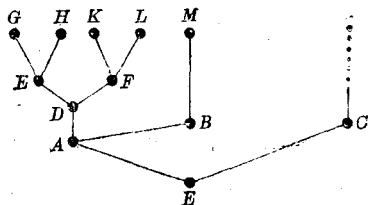
“不过，小平的‘目测法’还不够科学。因为站在这个路口看到的活路，并不一定真能通到下一道门。‘目测法’只保证这一步到下一步走得通，但这下一步是否能引向出口，并无保证。”

小平忙回答：“苏老师说得对，是这样。我有好几次都不得不退回来。还有几次，转来转去又转到原处。”

“我听不懂，苏老师，你们在说什么呀？”小勇问。

苏老师应声答道：“是这样。为了容易听懂，我画个图，”

说到这里，苏老师画出如下的一张图，



然后，苏老师解释说：“在图里，标明字母的地方表示路口或者死胡同的碰壁处，线段表示路。当你站在路口 E 处，用‘目测法’觉得 A 和 C 都是活路，都可以去。于是，假定你去了 A 处。到了 A 处，用‘目测法’认为 B 和 D 都走得通。假定你去了 D 处。到了 D ，你用‘目测法’观察后，觉得 E 和 F 都是活路，假定你去了 E 处。可是一到 E 处，你就发现再往前不论是去 G 或 H ，都得碰壁。这样，你只好退回到 D ，改去 F 。可实际上，到了 F ，你仍然无法前进，还得退回到 A 。所以，‘目测法’并不保证你‘永往直前’。”

“这下我懂了。”

小华接下来问：“那么，有什么好办法，可以保证顺利通过这八道门吗？”

“对。大家想想看，怎么个走法就一定可以保证通过这八道门而来到出口？”苏老师提问。

小明：“这可太难了！我们又不知道这八卦阵是怎么摆的，哪能想出一个走法，保证能由入口走到出口？”

“是的。”苏老师说道。“这阵怎么个摆法我们不清楚。

但问题的关键在哪里呢？是在一个具体的阵的摆法吗？”

“当然不是。”小华在回答，“因为苏老师您提的问题，是要我们想出一个办法，它不论阵怎么摆，都能保证我们由入口来到出口。”

苏老师：“对！是这样，大家说呢？”

大家齐声回答：“是，是这样！”

“好了，我们的目的已经明确，那么，我们就来看看应该怎么办吧！”苏老师接着说。

“我想，”小华说：“为了保证一定可以由入口来到出口，我们只要想出一个办法，这个办法能使我们走遍阵中所有的路就好了。”

小平马上接着说：“你的这个想法好！”

小明说：“我不明白，为什么要走遍阵中所有的路呢？我们不是只要由入口走到出口就行了吗？”

小平解释说：“是。我们的目的是只要由入口到出口就行。可是这路怎么选择呀！阵不同，路就不同。而阵怎么摆，我们又不知道。这样只好用‘笨办法’，想出一条所有的路都走到的办法，有了这个办法，出口当然也就要经过。这样不就有了一条由入口到出口的通路了吗！”

小明若有所思地说：“这倒也对！”

小华接着又补充说：“为了节省时间，为了提高效率，这个办法还应该尽量减少不必要的往返。”

“不！不是尽量减少，而应该是完全避免。”不知是谁插了一句。

苏老师说：“什么叫‘完全避免’呢？比如说，你走进死胡同碰了壁，那只好退回来。这算不算不必要的往返？”

小华说：“这当然不算。因为我们要走遍阵中所有的路，而哪条路是死胡同，我们事先并不知道，要走了以后才知道。是死胡同，进去碰了壁以后，当然得退回来，这不算不必要的往返。”

苏老师接下去说：“照这么说，不仅碰壁的最后一段，例如上面图中的 EH 段允许往返， DE 段也应该允许往返。其它如 DF 、 AD 都应该允许往返。可这是就上面这个具体图说的。在一般情形，哪段允许往返，哪条不允许，这标准怎么定？为了统一起见，我们可否说，在走的过程中，实行‘行人靠右走’的原则，也就是说，每条路的两边为人行道，你前进时得靠右走。这样，不必要的往返可说成是重复走了同一条人行道。”

小平说：“我觉得这样来规定我们行走的标准比较合理。按这个标准，问题变成，我们可不可以设计出一种走法，使得路两边的人行道都走到。而已经走过的人行道不能再走。”

小华说：“我看是这样。”

苏老师总结说：“如果大家都同意这个意见，那么，我们就可以把一个阵画成一个很简单的图了。在这个图里，点或者表示死胡同的尽头，或者表示交叉路口。而点和点之间如果有路可通，就用线把它们连起来。”

小华说：“是这样。”

小明补充道：“考虑到我们的问题，是不是用线表示人行道更好。如果这么表示，那么点和点之间如果有线相连，它就一定是两根线。”

小勇问：“为什么？”

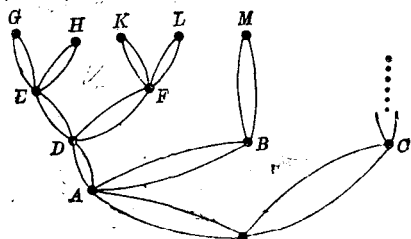
小平说：“你忘了？我们不是说过，路两边是人行道。所以有一条道路的话，就应该有两条人行道。”

“是，是！我把这给忘了。”

“这样，每个阵决定两个图。一个图就是象上面第4页上所画的那种‘示意图’，另一个是在‘示意图’里，将每条线改成‘双轨’，也就是讲，点与点之间如果有连线的话，它一定成对出现。这种图为了和‘示意图’区别，就叫它‘阵路图’吧！”

“和上面的图相应的‘阵路图’如下。”

苏老师一边说，一边画出下面这张图。



小明问道：“将阵用‘阵路图’表示以后，我们的问题是什么呢？”

小华说：“问题就变成，由入口（它是某一个指定的点）出发，有什么办法可以通过所有的线段而回到出发点。”

小平补充道：“在走的过程中，走过的线段不应重复。”

“对！”老师说了一句。

“呀！这就是昨天，我哥哥跟我说的‘一笔画’了。”小勇忙说。

小明问：“什么叫‘一笔画’呀？”

小勇说：“‘一笔画’就是一个图能不能一笔画成。”

苏老师补充说：“一笔画问题，就是给定一个由点和线段组成的图以后，看能不能笔不提起来而将这个图画出来。在画的过程中，每条线只准画一次，不能重复。”

小明说：“我懂了。不过，‘阵路图’有点特别，因为两个点之间，如果有线相连，那么这种线总有两条。而一般的图可以不这样吧！”

“是的！”苏老师回答。

二、“一笔画”问题

“上次，我们讨论到，为了破‘八卦阵’，‘只要怎样就行了？’”苏老师问。

小明说：“只要我们能想出一种走法，这个走法可以使我们不遗漏地经过阵中所有的‘人行道’就行了。”

小平补充说：“这种走法，最后归结为‘一笔画’问题。”

“什么叫‘一笔画’呢？”

小勇说：“一笔画就是给定一个由某些点，和这些点之间的某些连线所构成的图形以后，问能不能用一笔将它画出来。”

小华补充道：“也就是说，能不能用笔不离开纸而将它画出来。但画时，每条线只能画一次，不能重复。”

苏老师总结说：“大家说得都很对。现在对于图，我要做点补充。

1. 因为线段是连接点的，所以同一线段的两个端点互不相同；

2. 线段和线段彼此不相交；

3. 任意两点之间可以有、也可以没有连线，有的话也可以不止一条。”

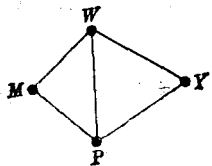
“这么规定图的概念有什么好处呀？”小明问。

“有呀！”苏老师说：“这样来规定图的概念，它的优点是概括性强。不仅我们前面说过的‘阵路图’是图，其它许多东西也是图。如飞机的航线示意图，电子学里面的电路图等等，都是图。实际上，人与人之间的朋友关系，国与国的相邻关系，‘家谱’，行政机构的隶属关系，等等，也都可以用图来表示。”

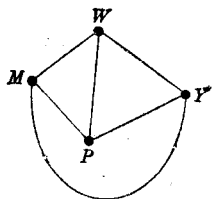
“这怎么表示呀？”小勇想不通。

小华说：“这样行不行？在人与人之间的朋友关系中，点表示人，点之间有没有连线，就看这点所代表的人之间有无朋友关系。有朋友关系就连线，没有就不连。这样，人与人之间的朋友关系就可以从图上看得清清楚楚了。”

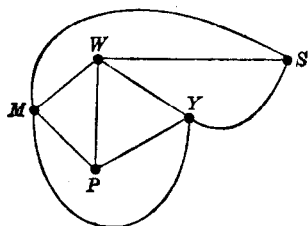
小平补充说：“例如，我们四个人用四个点表示， W 代表小华， M 代表小明， Y 代表小勇， P 代表我。”说到这里，小平在黑板上画了四个点，并标上字母。“因为我们彼此都认识，都是朋友，所以每两点之间都应连上线。”这时小平边说边在黑板上画出了这样一个图



“为了使线和线不相交，这最后一条表示小明和小勇是朋友的线，只好兜大圈了。”说着，小平又添了一笔，最后得到下图



小明接着说：“如把苏老师也画进来，那就应是……”小明边说边添点和线，画成



“再往下怎么添呢？”小明一边画，一边在思考。

小勇马上说：“画在左边试试。”说着，小勇画出这样一个图

