怎样指导

初中学生进行数学总复习

北京出版社

怎样指导初中学生进行

数学总复习

北京教育学院教学研究部编

北 京 出 版 社

怎样指导初中学生
Zenyang Zhidao Chuzhong Xuesheng

进行数学总复习
Jinxing Shuxue Zongfuxi

北京教育学院教学研究部编

*

北 京 出 版 社 出 版

(北京崇文门外东兴隆街51号)

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

787×1092毫米　32开本8.5印张187,000字

1986年4月第1版　1986年4月第1次印刷

印数：1—23,300

书号：7071·1076　定价：1.20元

前　言

本书选编了部分数学教师，于1982年、1983年和1984年在全市初中数学总复习经验交流会上的讲稿．它包括代数、平面几何、解三角形等十二篇文章．这些文章对初中数学的基础知识作了较深刻的分析，指出了复习的重点和要求，介绍了复习方法，围绕重点通过例题阐述了如何培养学生综合运用知识的能力．

本书可供初中数学教师在指导学生进行总复习时参考．

本书选编的各篇文章基本上是由作者在原来讲稿的基础上加以整理的，这次汇编成册时，又作了必要的修改和补充．最后，由北京教育学院教学研究部数学教研室作了统编．

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，希望读者批评指正．

北京教育学院教学研究部

一九八四年十月

目　录

谈谈数与式的复习工作

张　继　林

复习工作必须坚持深入钻研大纲，在加强基础知识、基本技能上下功夫，把注意力集中在引导学生学懂基本概念；弄通定理、公式的来龙去脉；理解和掌握解题的规律，并在此基础上提高学生分析问题和解决问题的能力.

一、实数

1. 在实数的有关概念的复习中应该注意的几个问题

（1）要注意概念的准确性，不能似是而非.

例1　奇数与偶数.

奇数与偶数的概念，起源于算术，那时当然不能考虑负数.但随着数的概念的发展，奇数与偶数的概念推广到整数，因而零和能被2整除的负数也是偶数.推广之后，使得一些数学定理更加一般化，意义更加广泛.如“一个非零实数的偶次幂一定是正数”；“（－1）的偶次幂都等于1”等就不仅对能被2整除的正数适用，而且可推广到零和能被2整除的负数中去.当我们解决“三个连续偶数，中间的一个是2n，用代数式表示这三个偶数的平方和”一类问题时，就不需要规定n是大于1的整数.但要注意，奇、偶数的一般表达式中的条件，如形如2n的数一定是偶数，必须加上n为整数的条件.

例2　倒数.

倒数名称的来源，出于把分子、分母颠倒的意思，但在

更一般地情况下（所有非零有理数以至无理数等）使用这个名词，“把一个数的分子、分母颠倒后所得的数，叫做这个数的倒数”就不合适．更有甚者，学生会引出$\frac{\pi}{2}$是分数的错误，而倒数的正确概念是：“1除以一个数的商”．

（2）要注意对概念的全面理解和逐步深化．

例3 相反数．

对相反数的概念的理解可以分为三个方面：①对任何一个实数a，有且仅有一个实数－a存在，a与－a互为相反数，②两个互为相反数的和为零，绝对值相等．即$a+(-a)=0$，$|a|=|-a|$；③两个互为相反数所表示的点在原点的两旁，到原点的距离相等，零的相反数是零，在数轴上用原点表示．

例4 绝对值．

①课本中对绝对值概念的定义是采用代数方法对正数、负数和零分别作规定：

$$|a|=\begin{cases} a, & (\text{当}a>0\text{时}) \\ 0, & (\text{当}a=0\text{时}) \\ -a. & (\text{当}a<0\text{时}) \end{cases}$$

这就是说一个数的绝对值是一个非负的数．

②绝对值与距离的一致性，绝对值的几何意义是在数轴上表示一个数的点到原点的距离．

③绝对值与算术根，$\sqrt{a^2}=|a|$．

④绝对值概念的巩固与深化．下列问题的解决，有助于绝对值概念的巩固与深化．

i）计算：$\left|\left(-1\frac{3}{10}\right)\div\left(+2\frac{2}{5}\right)\right|$，　$\left(\text{答：}\frac{13}{24}\right)$

ii）已知$|x-1|=5$，求实数x；（答：6 和 -4）

iii）已知$|x-1|<5$，求实数x；（答：$-4<x<6$）

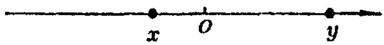
iV）化简$\sqrt[6]{\dfrac{a^6}{(a-b)^{18}}}$；

$$\left(\frac{\sqrt[6]{a^5}}{|(a-b)^2|}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{(a-b)^3}, & (\text{当}a>b\text{时})\\ \dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{(b-a)^3}. & (\text{当}a<b\text{时})\end{cases}\right)$$

V）已知$(3x-y-4)^2+|4x+y-3|=0$，求实数x、y；

$$\left(\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}\right)$$

Vi）已知实数 x、y 在数轴上的对应点如图所示.

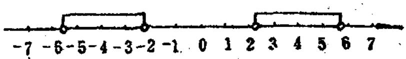


化简$|x+y|+|x-y|-|x|-|y|$.　　$(x+y)$

（3）要注意把概念的应用、技能的训练渗透在例题、习题中.

例 5　求绝对值大于 2.3 而小于 5.7 的整数.

这一问题实际上是要求满足条件 $9.3<|x|<5.7$ 的整数x，在数轴上看得很清楚：



所以 x 为±3、±4、±5.

2．实数的运算

（1）有理数的运算是基础，要根据学生容易发生错误的地方，选择一些并非繁琐的题目，有的放矢地练习.

例 6　计算下列各题：

（1） $-2^2+(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3$；　　（答：18）

（2） $-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$；

$$\left(答：-\frac{3}{10}\right)$$

（3） $\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1$；（答：1）

（4） $\frac{1}{(-0.3)^2}$；$\left(答：11\frac{1}{9}\right)$

（5） $\left[1\frac{2}{13}-\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{6}+\frac{7}{12}\right)\times2.4\right]\div5$.$\left(答：-\frac{7}{26}\right)$

说明　$(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)\neq(-1)(-3)$；$-2^2\neq(-2)^2$；

$-(-3)^2\neq+3^2$；$(-0.3)^2\neq0.9$；

$1\frac{2}{13}-\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{6}+\frac{7}{12}\right)\times2.4\neq1\frac{2}{13}-1.5-0.4+1.4$.

（2）实数的近似值的求法，在实际问题中常常遇到，要求学生掌握.

例7　求 $a=2\sqrt{3}(2+\sqrt{7})$ 的不足近似值和过剩近似值.（精确到0.01）

解　$a=\sqrt{48}+\sqrt{84}$，查平方表得，

$6.928<\sqrt{48}<6.929$,

$9.165<\sqrt{84}<9.166$,

$16.093<\sqrt{48}+\sqrt{84}<16.095$,

$\therefore$　$16.09<a<16.10$.

即所求 a 的不足近似值是16.09，过剩近似值是16.10.

（3）要求学生熟练掌握科学记数法．

例8 用科学记数法表示:(1)849000; (2)0.000000605.

解 （1）$849000=8.49\times10^5$;

（2）$0.000000605=6.05\times10^{-7}$.

二、代数式

1.整式的四则运算和乘法公式

（1）整式复习的重点是整式的四则运算和乘法公式，要求正确、熟练地进行整式的四则运算；掌握乘法公式，正确地、灵活地、综合应用乘法公式进行计算．

例9 求下列代数式的值：

（1）设$a=-1$，$b=-2$，$c=-3$．

求$[a-(b-c)]^2+[b-(c-a)]^2+[c-(a-b)]^2$的值；

（2）已知$x=3a^n$，$y=-\frac{1}{2}a^{2n-1}$，当$a=2$，$n=3$时，求a^nx-ay的值；

（3）当$x=a^{-3}+b^{-2}$时，求$x^2-2a^{-3}x+a^{-6}$的值；

（4）已知$x+\frac{1}{x}=3$，求$x^4+\frac{1}{x^4}$的值．

解 （1）当$a=-1$，$b=-2$，$c=-3$时，

$$\begin{aligned}原式&=(a-b+c)^2+(b-c+a)^2+(c-a+b)^2\\&=(-1+2-3)^2+(-2+3-1)^2\\&\quad+(-3+1-2)^2\\&=4+0+16=20;\end{aligned}$$

（2）$a^nx-ay=a^n\cdot3a^n-a(-\frac{1}{2}a^{2n-1})=\frac{7}{2}a^{2n}$，

当$a=2$，$n=3$时，

$$\frac{7}{2}a^{2n}=\frac{7}{2}\times 2^{6}=224;$$

（3）$x^2-2a^{-3}x+a^{-6}=(x-a^{-3})^2=(b^{-2})^2=b^{-4}$；

（4）$x^4+\frac{1}{x^4}=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]^2-2=(3^2-2)^2-2=47$.

例10 从某整式减去$xy-2yz+3zx$，因误为加上此式，则得答案是$2yz-3zx+2xy$，试求正确的答案.

解 若设某整式是A，$B=xy-2yz+3zx$，$C=2yz-3zx+2xy$，题意是已知$A+B=C$，求$A-B$.

$$\begin{aligned}A-B&=(A+B)-2B=C-2B\\&=(2yz-3zx+2xy)-2(xy-2yz+3zx)\\&=6yz-9zx。\end{aligned}$$

例11 若$x^4+4x^3+3x^2+px+q$及x^3+3x^2+2x+1被x^2+2x+1除时所得的余式相同，求p、q的值.

解 $x^3+3x^2+2x+1=(x^2+2x+1)(x+1)+(-x)$,

$x^4+4x^3+3x^2+px+q=(x^2+2x+1)(x^2+2x-2)+[(p+2)x+(q+2)]$，$(p+2)x+(q+2)\equiv -x$,

$\therefore$ $p+2=-1$，$q+2=0$.

$\therefore$ $p=-3$，$q=-2$.

2. 因式分解

（1）关于因式分解的概念.

①把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解. 在分解因式时，一定要注意把多项式的每个因式分解到不能再分为止. 例如，x^4-y^4如果分解为$(x^2+y^2)(x^2-y^2)$，由于x^2-y^2还可以继续分解为$(x+y)(x-y)$，所以第一次分解因式没有分解到最终结果. 正确的结果应为$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

②因式分解在什么数的范围内进行是十分重要的，若题目中没有说明，一般指在有理数范围内进行．

③因式分解的困难在于它是多项式乘法的逆变形，由于式子千变万化，因式分解并不存在一个万能的公式，这就要求我们在复习因式分解时，应该在着重强调因式分解的一般步骤（使学生有一个基本思路）的基础上，分析某些特殊类型的因式分解的方法．

（2）因式分解的方法．

例12 分解因式：

（1）$x^4y-x^2y^3+x^3y^2-xy^4$；

（2）$16x^3+2y^3-2x-y$；

（3）$(x^2+5x+6)(x^2+7x+6)-3x^2$；

（4）$x^3-48x+7$．

解 （1）$x^4y-x^2y^3+x^3y^2-xy^4$

$=xy(x^3-xy^2+x^2y-y^3)$

$=xy[(x^3-xy^2)+(x^2y-y^3)]$

$=xy[x(x^2-y^2)+y(x^2-y^2)]$

$=xy(x^2-y^2)(x+y)$

$=xy(x+y)^2(x-y)$；

（2）$16x^3+2y^3-2x-y$

$=2(8x^3+y^3)-(2x+y)$

$=2(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)-(2x+y)$

$=(2x+y)[2(4x^2-2xy+y^2)-1]$

$=(2x+y)(8x^2-4xy+2y^2-1)$；

（3）$(x^2+5x+6)(x^2+7x+6)-3x^2$

$=(x^2+6)^2+12x(x^2+6)+35x^2-3x^2$

$=(x^2+6)^2+12x(x^2+6)+32x^2$

$=(x^2+4x+6)(x^2+8x+6)$；

（4）$x^3-48x+7$

$=x^3-49x+x+7$

$=x(x^2-49)+(x+7)$

$=x(x+7)(x-7)+(x+7)$

$=(x+7)(x^2-7x+1)$.

例13 在实数范围内分解因式：

（1）x^2+4x+1；（2）x^4-6x^2+9.

解 （1）$x^2+4x+1=(x+2)^2-3$

$=(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$；

（2）$x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2$

$=(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2$.

3. 分式

（1）分式的意义：除式中含有字母的有理式叫做分式.

（2）分式中字母取值的限制.

例14 x取何值时，分式 $\dfrac{2+x}{3-\dfrac{2}{x-1}}$ 的值为0？没有意义？

解 $\dfrac{2+x}{3-\dfrac{2}{x-1}}=\dfrac{(2+x)(x-1)}{3x-5}$.

∴ 当 $x=-2$ 时，分式的值为0，

当 $x=1$ 或 $x=\dfrac{5}{3}$ 时，分式没有意义.

（3）分式运算的重点是使学生正确、熟练地进行分式的四则运算和繁分式的化简.

（4）有目的的恒等变形有助于培养学生的逻辑思维能

力，但应从学生的实际出发，不作一般要求．

例15 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，求 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值．

解 由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，得 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$，

从而 $(a+b)^2=ab$，$a^2+b^2=-ab$，

$$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{-ab}{ab}=-1.$$

4. 根式

根式部分复习的重点是方根和根式的有关概念，特别是算术根的概念，$\sqrt{a^2}=|a|$，基本性质和二次根式的运算．

（1）算术根的概念．

例16 化简下列各式：

（1）$\sqrt{(\lg 2-\lg 5)^2}$；　　（2）$\sqrt{\lg^2 x-2\lg x+1}$；

（3）$\sqrt{\cos^2 x-4\cos x+4}$；

（4）$\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}$　$(0<x<1)$．

解 （1）$\because$ $\lg 5>\lg 2$，

$\therefore$ $\sqrt{(\lg 2-\lg 5)^2}=\lg 5-\lg 2$；

（2）$\sqrt{\lg^2 x-2\lg x+1}$

$=\sqrt{(\lg x-1)^2}$

$=|\lg x-1|=\begin{cases}\lg x-1,（当\ x\geqslant 10\ 时）\\ 1-\lg x;（当\ 0<x<10\ 时）\end{cases}$

（3）$\sqrt{\cos^2 x-4\cos x+4}$

$=\sqrt{(\cos x-2)^2}=2-\cos x$；

（4）$\because$ 当 $0<x<1$ 时，$x-\frac{1}{x}<0$，

$$\therefore \sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}-x.$$

（2）在例题分析中强调运用已知概念、公式、法则，力求在解题实践中自然记忆.

（3）在根式化简中要注意运算的合理性和运算的技巧.

例17 计算 $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$.

解 原式 $=[(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})]^2$

$=(18-12)^2=36.$

例18 化简 $\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$.

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\sqrt{x^2+a^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2+a^2}.$

例19 当 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$时，求$y=\dfrac{1}{2}x^3-x^2-x+1$的值.

解法一 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1,$

$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^3-(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}+1)+1$

$=1.$

解法二 由 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，得 $x-1=\sqrt{3}$.

$$y=\frac{1}{2}x^3-x^2-x+1$$

$$=\frac{1}{2}[x(x-1)^2-3x+2]$$

$$=\frac{1}{2}[3x-3x+2]=\frac{1}{2}\times 2=1.$$

5. 几个常用的数学方法

（1）配方法．配方法是一种重要的数学方法，在推导一元二次方程的求根公式时，先把方程的左边配成一个二项式的平方，右边是一个大于或者等于零的常数，然后通过开平方来求出它的根，从而得到一元二次方程的根的公式．这种方法通常叫做配方法．它在二次函数图象的研究及其它一些数学问题中有着广泛的应用．

例20 分解因式 $4x^4-5x^2+4xy-4y^2+1$.

解 原式 $=4x^4-4x^2+1-x^2+4xy-4y^2$

$$=(2x^2-1)^2-(x-2y)^2$$

$$=(2x^2-1+x-2y)(2x^2-1-x+2y).$$

例21 已知 $x^2+y^2-6x+4y+13=0$，求实数 x、y.

解 配方 $(x-3)^2+(y+2)^2=0$,

得 $x=3$，$y=-2$.

（2）待定系数法．待定系数法是数学中的一种重要方法，它是根据恒等式的性质，通过确定未定系数来解决问题的，有许多问题的解决都要借助于这种方法．

例22 试确定整数m的值，使下式可分解成关于x、y的两个一次因式的积．

$$x^2+7xy-18y^2+mx+43y-24.$$

解 设 $x^2+7xy-18y^2+mx+43y-24$

$$=(x-2y+A)(x+9y+B)$$
$$=x^2+7xy-18y^2+(A+B)x+(9A-2B)y+AB,$$

则 $\begin{cases} A+B=m, \\ 9A-2B=43, \\ AB=-24. \end{cases}$

由 m 为整数的条件得到 $A=3,B=-8,m=-5$.

（3）换元法．换元法是一种重要的数学方法，在数学中有着广泛的应用．所谓换元法就是在一个比较复杂的数学式子中，把整个式子的一部分视作一个量，用一个字母（变量）去代替它，从而将一个复杂式子的结构简单化，使问题易于解决．

例23 分解因式 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

解 将原式变形为 $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$.

令 $y=x^2+8x$,

则 原式 $=(y+7)(y+15)+15$

$$=y^2+22y+120$$
$$=(y+12)(y+10)$$
$$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$$
$$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10).$$

例24 解方程 $2x^2+3x+3=5\sqrt{2x^2+3x+9}$.

解 将原方程变形为

$$(2x^2+3x+9)-6=5\sqrt{2x^2+3x+9}.$$

令 $y=\sqrt{2x^2+3x+9}$，得 $y^2-5y-6=0$.

解之得，$y_1=6$，$y_2=-1$.

由 $6=\sqrt{2x^2+3x+9}$，得 $x_1=3$，$x_2=-4\frac{1}{2}$.

而 $-1=\sqrt{2x^2+3x+9}$ 无解。