现代数学基础丛书 89

调和分析及其在偏微分方程中的应用

（第二版）

苗长兴 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书内容涉及调和分析的经典理论,特别是与偏微分方程研究密切相关的方法与技巧. 例如: C-Z 奇异积分算子、Littlewood-Paley 理论、抽象插值方法、可微函数空间的调和分析刻画等. 同时着力于用调和分析的方法研究偏微分方程. 为此,详细讨论了振荡积分理论、Fourier 限制型估计及相应的 Strichartz 估计、Keel-Tao 端点时空估计等. 借助于调和分析的现代理论与方法, 研究了波动及色散方程的 Cauchy 问题的适定性、低正则性与散射性理论. 第二版对一些内容进行了增删, 诸如: 增加了发展型方程的调和分析方法的研究背景、非线性 Klein-Gordon 方程的低正则性, 删除了波动方程的散射性等. 重新改写了一些章节,增加了许多注记,以反映这一领域的最新进展. 本书的特色是将调和分析的现代方法与偏微分方程的研究有机地结合起来,可以帮助读者很快地进入这一研究领域的前沿.

本书可供理工科大学数学系、应用数学系的高年级学生、研究生、教师及相关的科学工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

调和分析及其在偏微分方程中的应用 / 苗长兴著. —2 版.
北京: 科学出版社, 2004
(现代数学基础丛书; 89)
ISBN 7-03-012665-3

Ⅰ. 调… Ⅱ. 苗… Ⅲ. 偏微分方程—实用调和分析 Ⅳ. O241.86

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 000086 号

责任编辑: 吕 虹 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

1999 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2004 年 3 月第 二 版 印张: 39 3/4
2004 年 3 月第二次印刷 字数: 758 000
印数: 2 001—4 500
定价: 59.00 元

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第一版序言

调和分析或 Fourier 分析的起源可追溯到 Euler, Fourier 等著名数学家的研究，之后，经历了近 200 年的发展，已成为数学的核心学科之一．它的方法几乎渗透到数学的所有领域，鉴于它的思想和方法来源于分析的许多领域，调和分析在数学的许多领域中有着广泛的应用，特别是对偏微分方程、代数数论而言尤为如此．本书主要介绍调和分析的基本内容、基本技巧以及它在偏微分方程中的应用．

众所周知，调和分析中建立的许多分析工具诸如算子插值方法、极大函数方法、球调和函数理论、位势理论和一般可微函数空间等是研究偏微分方程的必备工具．经典的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在双曲方程组的应用、第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在拟微分算子的作用、BMO 空间在研究椭圆型偏微分方程的解的正则性等诸方面都充分体现了调和分析在偏微分方程研究中的巨大作用．近 20 年来，随着调和分析理论的发展和逐步完善，它在偏微分方程中的应用显得尤为突出．这主要表现在两方面，其一是它在研究椭圆型方程边值问题中的应用．当区域是 Lip 边界时， E.M.Stein 及其学派解决了二阶椭圆型方程边值问题 L^p 估计以及解的正则性问题，这方面的工作可见 E.M.Stein 等的文章或 C.E.Kenig 的 " Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problem " 一书．其二是它在研究发展型方程的定解问题中的作用．以振荡积分估计及位势估计为基础，建立线性发展方程解的 $L^p - L^q$ 估计以及相应的时空估计，此为研究非线性发展型方程提供新的工作空间．可以毫不夸张地讲，时空估计方法和非线性项的分数阶求导估计使非线性发展型方程的研究进入一个崭新的阶段．例如：借助于时空估计方法和非线性项分数阶求导估计，可以建立许多非线性色散波方程 (非线性 Schrödinger 方程、 KdV 方程、 BO 方程等) 的 Cauchy 问题在低阶 Sobolev 空间中的适定性理论． W.A. Strauss 借助于时空估计，将非线性色散波方程和非线性波方程的经典解的散射性理论扩充到能量解的散射性理论，建立了非线性 Schrödinger 方程和非线性波动方程能量小解的散射性理论．在适当的条件下， Brenner 获得了非线性 Klein-Gordon 方程 Cauchy 问题能量解的散射性理论，而 Ginibre 和 Velo 建立了非线性 Schrödinger 方程能量解的散射性理论．利用时空估计和非线性项的时空估计，5 次波动方程 Cauchy 问题能量

解的适定性的建立以及耦合 Klein-Gordon-Maxwell 方程 Cauchy 问题能量解的适定性的建立等都充分证明了调和分析方法在现代偏微分方程研究中的主导作用. 本书主要包含 Fourier 变换、平移不变算子理论、球调和函数的理论及其应用、算子插值理论、极大函数理论及 BMO 空间、奇异积分理论及其应用、Littlewood-Paley 理论、位势 Banach 空间及一般可微函数空间、振荡积分估计、线性发展方程解的时空估计、色散波方程 (组) 的 Cauchy 问题及散射性理论、经典波动方程的 Cauchy 问题及散射性理论等. 本书的调和分析部分以基本内容、基本技巧为主线, 特别是与现代偏微分方程研究联系密切的方法和技巧. 在偏微分方程的应用方面, 重点研究非线性发展方程的调和分析技巧和方法. 而椭圆型方程的调和分析方法可见 Kenig 的专著. 当然, 这里我们借助于乘子理论和 Hörmander 空间给出了算子半群与解析半群的乘子刻画, 这对偏微分方程的半群方法也有重要作用. 需要说明的是, 本书中许多定理的证明是由作者重新给出, 限于作者所识, 不妥之处在所难免, 希望诸位同仁批评指正, 以便再版时予以纠正.

在本书的写作过程中, 得到了周毓麟院士的热情关心和极大的帮助, 周先生提供了自己多年积累的资料, 并对本书的内容和选材提出了很好的建议. 周民强教授是作者调和分析的引路人, 1986 年作者聆听周民强先生的调和分析入门课程, 他精辟的讲解给作者留下了深刻的印象, 并且影响了作者日后的学习和研究. 国外著名的数学家 L. Hörmander, T.Kato, W.Wahl, J.Ginibre, N.Hayashi, Y.Tsutsumi 等给作者提供了他们的文章和许多有价值的资料, 有些问题和他们进行了有益的讨论. 郭柏灵教授始终对本书的写作予以热情的帮助, 在他的关心和支持下, 本书的部分内容作为博士生教材, 在中国工程物理研究院研究生部使用多次, 先后参加听课的有: 丁时进副教授、黄海洋副教授、胡越副教授、邢家省博士、韩永前博士、鲁百年博士、元荣博士、蒋慕蓉博士、杜先云博士等, 他们给作者提出许多宝贵的意见. 所有这些对本书的形成都起到了极大的推动作用, 在此致以诚挚的感谢.

张恭庆院士、丁伟岳院士对本书的写作予以热情鼓励和支持, 作者深表感谢. 借此机会, 作者对丁夏畦院士、孙和生教授、符鸿源教授、沈隆钧教授、叶其孝教授、王靖华教授、陈国旺教授、白凤图教授、顾永耕教授等表示深深的感谢, 他们在作者的成长过程中给予许多真诚的帮助. 与此同时, 作者对同行江松教授等表示谢意, 他们对作者从事本书的写作给予了热情的关心和支持. 本书的排版录入均由作者之妻刘晓岚女士完成, 科学出版社的编审吕虹女士等做了大量的编辑工作, 作者对她们的辛勤劳

动表示由衷的感谢.

本书得到国家自然科学基金委员会优秀科研成果专著出版基金的资助.

作者 1999 年于北京

第二版序言

本书第一版出版以来，得到了众多数学前辈与同行的厚爱，许许多多的读者给作者来信，以不同的方式提出了这样或那样的建议．鉴于近几年相关领域产生了一些新的研究进展，萌生了修订本书的念头．修改的原则是既保持原有的风格，又增加一些新的进展 (有些用注记方式，以不增加篇幅), 同时去掉一些繁琐且非基本的内容，以便更好地突出主题．

第二版的主要变动是：增加了第十章“发展型方程的调和分析方法背景” (原来的章次顺延); 增加了第十三章的第四节“非线性 Klein-Gordon 方程的低正则性”，同时去掉了原有的“非线性波动方程的散射性理论”一节；重新改写了第十一章的第五节与第十二章的第三、四节．当然，更多的、更费力的改动是在各个章节的字里行间，除了修改第一版中的打印错误外，全书增加了许多注记，以反映这一领域的最新进展．例如：在讲解线性发展方程解的时空估计，用注记形式介绍了 Keel-Tao 的端点时空估计等．

在这一版的修订过程中，作者的博士生张晓轶、叶耀军、朱佑彬、原保全、徐桂香、王月山及中国工程物理研究院研究生部的博士生吕永强、霍朝辉、沈彩霞、阎伟等参加了作者主持的偏微分方程的现代方法讨论班，为本书的校对做了许多有益的工作，在此表示感谢．

另外，需要指出的是，本书的排版软件采用的是美国数学会的 AMSTEX 格式，用于中文排版受到软件自身的许多限制，投入了大量的精力，但仍有不尽人意之处，在此对参与此工作的各方人士一并表示感谢．

一本好书应该对青年数学工作者与青年数学家有所影响与帮助，作者正是基于这一理念从事修订工作的．当然，要达到这一目标，或许还要经过多次努力才能实现，但作者会一如既往地追求这一目标．

本书第二版得到国家自然科学基金委员会数学天元基金、国家重点基础研究发展规划项目：核心数学“ 973 ”及中国工程物理研究院科学技术基金的资助．

作者于北京

2003 年 5 月

目　录

第一章 Fourier 变换

Fourier 变换是调和分析的核心问题和基本工具，它既有初等的运算，又蕴含许多高深的技巧和方法，可以说它是许多方法的生长点. 本章的主旨是讨论 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换. §1.1 讨论卷积运算及其性质，特别是由卷积派生的正则化原理、点态收敛等，为建立 $L^p(1<p<\infty)$ 上的 Fourier 变换提供了工具. §1.2 讨论 L^1 上的 Fourier 变换及其性质，通过 Abel 或 Gauss-Weierstrass 求和法，获得了 Fourier 反演公式，从而完整地建立了 L^1 上的 Fourier 变换的理论. 借助于 L^1 上的 Fourier 变换与 Banach 延拓定理，§1.3 给出 L^2 上的 Fourier 变换的定义. 进而，注意到 Fourier 变换是 L^2 上的酉算子，可以获得 L^2 上的 Fourier 反演公式及 Plancherel 恒等式等优美的性质. 自然，也就建立了 $L^p(1<p<2)$ 上的 Fourier 变换的理论. 当 $p>2$ 时，是否能定义 L^p 函数的 Fourier 变换？这需要在更高层次上讨论 Fourier 变换来回答这一问题 ($L^p\subset\mathcal{S}'$). 为此，§1.4 借助于速降函数空间 $\mathcal{S}$ 上的 Fourier 变换，将 Fourier 变换的定义推广到缓增广义函数空间 $\mathcal{S}'$. 这里使用了欧氏空间的平移结构、伸缩变换、广义函数理论等分析工具.

§1.1 卷　积

本节我们来讨论函数的卷积. 卷积运算是现代分析中的基本运算，它在 Fourier 变换、函数逼近以及偏微分方程中起着重要的作用. 为讨论方便，先引入一些通用的记号. $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，$x\cdot y=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ 表示欧氏内积，相应的 $|x|=\sqrt{x\cdot x}$ 是由欧氏内积诱导的欧氏范数. $L^p=L^p(\mathbb{R}^n),1\le p\le\infty$ 表示通常的 Lebesgue 空间，对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_p$ 表示通常的 L^p 范数. $C_0(\mathbb{R}^n)$ 表示集合 $\{f(x)\mid f(x)\in C(\mathbb{R}^n),\text{且}\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0\}$ 在 L^∞ 范数下所构成的空间. 若 $A\subset\mathbb{R}^n$, 通常用 $\operatorname{mes}(A)$ 和 $\operatorname{diam}(A)$ 分别表示 A 的测度和直径. $\mathcal{F}$ (或 $\hat{}$) 和 $\mathcal{F}^{-1}$ (或 $\check{}$) 分别表示 Fourier 变换及 Fourier 逆变换，而 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 分别表示 Schwartz 速降函数空间和 Schwartz 缓增广义函数空间.

定义 1.1 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个 Lebesgue 可测函数，若 $f(x-y)\cdot g(y)$ 对几乎处处的 x 是 y 的可积函数，则称

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy \tag{1.1}$$

是 f 与 g 之卷积.

直接验算，卷积具有如下性质 (假设式中出现积分存在):

(i) $f*g=g*f$.

(ii) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(iii) $\tau_z(f*g)=\tau_z f*g=f*\tau_z g$.

(iv) supp $(f*g)\subset$ supp f+supp g. 这里 $\tau_z f(x)=f(x-z)$.

定理 1.1 (Young 不等式) 设 $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $h=f*g$ 几乎处处存在且有

$$\|f*g\|_p\le\|f\|_p\|g\|_1. \tag{1.2}$$

证明 当 $1\le p<\infty$ 时，利用 Minkowski 不等式，可见

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy=\|f\|_p\cdot\|g\|_1,\end{aligned}$$

而当 $p=\infty$ 时，(1.2) 是显然的，于是 Young 不等式 (1.2) 成立. 这里用到了 Minkowski 不等式，一般地可表示为:

引理 1.2 (Minkowski 不等式) 设 $1\le p\le\infty$, 则有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy. \tag{1.3}$$

证明 当 $p=\infty$ 时，(1.3) 显然成立. 下面证明 $1\le p<\infty$ 的情形. 记 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)dy$, 注意到积分交换次序，有

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_p&=\sup_{\|\phi\|_{p'}=1}\int_{\mathbb{R}^m}F\cdot\phi dx\\&=\sup_{\|\phi\|_{p'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\phi(x)dxdy\\&\le\sup_{\|\phi\|_{p'}=1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\|\phi\|_{p'}dy\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dy.\end{aligned}$$

从而， Minkowski 不等式 (1.3) 得证.

注记 1.1 由 Young 不等式及卷积的基本性质，容易看出:

(a) $f,g\in L^1\Rightarrow f*g\in L^1$. 于是, L^1 中的函数在加法、数乘、卷积意义下构成了一个 Banach 代数. 然而, 一般地由 $f\in L^1$, $g\in L^1$ 无法推出 $f\cdot g\in L^1$, 故 L^1 在通常乘法意义下不是 Banach 代数.

(b) $f*g$ 继承了 f,g 中每一个函数的优良性质, 例如: 若 f 可微, 则 $\Rightarrow f*g$ 可微. 它实际上开辟了用光滑函数逼近一般函数的方法.

(c) Fourier 变换将卷积变成乘积, 将乘积变成卷积.

(d) $\forall k(x)\in L^1, k(x)$ 决定了 K: $L^p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子, 即

$$Kf=k(x)*f,$$

且 $\|K\|=\|k\|_1$, 这里 $1\le p\le\infty$.

正则化原理 首先引入 L^1 伸缩函数簇的概念:

定义 1.2 对 $\phi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 记

$$\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon}),\qquad \varepsilon>0, \tag{1.4}$$

称 $\{\phi_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ 是 $\phi(x)$ 的伸缩函数簇.

易见, $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\varepsilon(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx$. 如: $\phi(x)=\chi_{|x|\le\frac{1}{2}}(x)$ 是集合 $\{x:|x|\le\frac{1}{2}\}$ 上的特征函数, 那么,

$$\phi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\chi_{|x|\le\varepsilon}(x),$$

进而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\phi_\varepsilon(x)=\delta(x),$$

这里 $\delta(x)$ 表示 Dirac 函数.

定理 1.3 设 $\phi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\phi dx=a$.

(1) 若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$,$1\le p<\infty$ 或 $f\in C_0\subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$f*\phi_\varepsilon\xrightarrow{L^p}af(x),\qquad \varepsilon\to0; \tag{1.5}$$

$$f*\phi_\varepsilon\xrightarrow{L^\infty}af,\qquad \varepsilon\to0,\quad f\in C_0\subset L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

(2) 若 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $f(x)$ 在开集 V 上一致连续, 则

$$f*\phi_\varepsilon\xrightarrow{1}f,\quad \varepsilon\to0,\quad x\in V. \tag{1.7}$$

证明 (1) 注意到

$$f*\phi_\varepsilon-af=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y)dy,$$

由 Minkowski 不等式 (1.3), 得

$$\begin{aligned}\|f*\phi_\varepsilon-af\|_p&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}|\phi_\varepsilon(y)|dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}|\phi(y)|dy.\end{aligned}\tag{1.8}$$

注意到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le 2\|f\|_p<\infty,$$

以及 L^p 空间函数的整体连续性

$$\lim_{|h|\to0}\|f(x+h)-f(x)\|_p=0,\quad \forall f\in L^p(\mathbb{R}^n).\tag{1.9}$$

对 (1.8) 式利用 Lebesgue 控制收敛定理，就得

$$\|f*\phi_\varepsilon-af\|_p\longrightarrow0,\qquad \varepsilon\to0\quad(1\le p<\infty).$$

另一方面，当 $p=\infty$, $f\in C_0\subset L^\infty$, 因而 $\|f(x)\|_\infty<\infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\|f*\phi_\varepsilon-af\|_\infty\le\left\|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon y)-f(x)||\phi(y)|dy\right\|_\infty\longrightarrow0,\quad\varepsilon\to0.$$

(2) 对 $\forall\delta>0$, 取充分大的闭集 W, 使得 $\int_{\mathbb{R}^n\setminus W}|\phi(x)|dx\le\delta$. 于是,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in V}|f*\phi_\varepsilon-af|\le&\sup_{x\in V,y\in W}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|\int_W|\phi|dx\\&+2\|f\|_\infty\delta.\end{aligned}\tag{1.10}$$

故当 $\varepsilon\to0$ 时，由 δ 的任意性，就得 (1.7).

注记 1.2 (a) 在定理 1.3 中，若 $a=1$, 就是所谓 L^p 正则化原理，特别地，当 $a=0$, (1.5) 和 (1.6) 仍然成立.

(b) 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$. 记 $\omega_{p,f}(h)=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, 那么

$$\lim_{|h|\to0}\omega_{p,f}(h)=0.\tag{1.11}$$

事实上，由于 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 稠于 $L^p(\mathbb{R}^n)$, 因此，对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}.$$

另一方面，由 $g(x)$ 的一致连续性，可取 h 充分小，使得

$$|g(h+x)-g(x)| \le \frac{1}{\text{mes}(B_{\text{diam}(\text{supp}g)+1}(0))} \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样，当 $|h| \le 1$ 充分小时，据上面两式易见

$$\begin{aligned}\omega_{p,f}(h) \le & \|f(x+h)-g(x+h)\|_p + \|g(x)-f(x)\|_p \\ & + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ < & \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon \text{mes}(\text{supp}g(x) \vee \text{supp}g(x+h))}{3\text{mes}(B_{\text{diam}(\text{supp}g)+1}(0))} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.12}$$

推论 1.4 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 或 $f \in C_0 \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则存在 $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C_c^\infty$, 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon \overset{L^p}{=\!=} f, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon \overset{L^\infty}{=\!=} f, \qquad \forall f \in C_0 \subset L^\infty.$$

证明 (i) 若 $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 具有紧支集，取 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数 $\rho(x)$ 满足

$$\rho(x) = \begin{cases} C_n e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

且 $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$. 于是， $g_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon(x) \in C_c^\infty$ 并且

$$\|g_\varepsilon - f\|_p \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

(ii) 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ 以及 $\forall \delta > 0$, 存在紧支集函数 $g \in L^p$ 使得

$$\|f-g\|_p < \frac{\delta}{2},$$

于是，取 $g_\varepsilon = g * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 当 ε 充分小时，由 (i) 可见

$$\|f-g_\varepsilon\|_p \le \|f-g\|_p + \|g-g_\varepsilon\|_p < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

(iii) 类似地，读者可证明 $f \in C_0 \subset L^\infty$ 的情形.

点态收敛 上面介绍了 L^p 意义的逼近问题，在适当条件下，这些逼近在点态意义下也是收敛的.