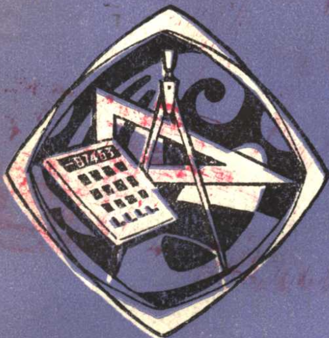

ZHONG XUE SHU XUE FU XI TIGANG

中学数学复习提纲

·天津市教育教学研究室·

中学数学复习提纲

天津市教育教学研究室编

*

天津人民出版社出版

天津市新华书店发行

天津新华印刷二厂印刷

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 1

一九八〇年一月第一版

一九八〇年一月第一次印刷

书　号：7072 1157

定价：0.80元

说　　明

这本复习提纲是1979年《中学数学复习提纲》的修订本。由于在定稿时尚未见到1980年高考复习大纲，故仍以1979年高考复习大纲为准。

为便于师生参考，对本书中的复习题和总复习题．另编有一本《中学数学复习提纲复习题解》。

目　录

代　　数

一　实　数

这部分内容主要包括有理数、实数、方根、算术根等概念及实数的运算．复习时，应着重以下几点：

1．能确切地叙述各种数的意义、从属关系，正确区分具体数的类别．

2．明确实数的几何意义、基本性质，确切掌握实数绝对值、方根、算术根的概念，并能解决有关问题．

3．准确而又熟练地掌握实数的四则运算、乘方和开方运算．

基础知识

1．**实数的概念**　随着生产实践的发展，不断提出新的问题，促使数的概念也逐步扩充．在算术里最初只有自然数（也就是正整数）和零，有了量的分割的概念，便引进了分数，这时就把数的范围扩展到了正有理数和零．有了正负数的概念后，便把数的范围扩展到有理数．引进无理数后，就把数的范围扩展到了实数．

用数的系统表表示如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left\{\begin{matrix}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{有限小数和}\\ \text{无限循环小数}\end{matrix}\end{cases}\\ \text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

2. **实数的几何表示** 数轴是一条规定了方向、原点和长度单位的直线．任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任何一个点都表示一个实数．也就是说，实数和数轴上的点有一一对应的关系．

3. **实数的绝对值** $|a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

几何意义：在数轴上对应于实数 a 的点到原点的距离．

4. **相反的数** 实数 a 和 $-a$ 是互为相反的数．如果 a、b 是互为相反的数，那么有：$a+b=0$．

5. **实数的大小** 在数轴上两个点表示的两个实数，在右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大．

6. **实数的运算**

（1）有理数的运算 四则运算和乘方．

（2）实数的运算 对于无理数，一般按指定的精确度，用和它近似的有理数代替后再进行计算；对于没有指定精确度的根式，可按根式运算法则进行运算．

7 **实数的开方**

（1）方根 如果 $x^n = a$（n 是大于 1 的整数），那么 x 叫做 a 的 n 次方根．求 a 的 n 次方根的运算，叫做把 a 开 n 次方．

(2) 方根的性质

奇次方根的性质　在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数.

偶次方根的性质　在实数范围内，当n是偶数时，正数a的偶次方根有两个，即$\pm\sqrt[n]{a}$；负数的偶次方根没有意义.

零的任何次方根仍是零.

(3) 算术根　正数a的正的方根叫做算术根，用$\sqrt[n]{a}$表示. 当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根.

根据算术平方根的定义，可以得到一个实数的平方的算术平方根：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

例　　题

1. (1) a和$2a$哪一个大些？

(2) 在什么条件下可以断定$a-b$小于$a+b$？

(3) 在什么条件下可以断定$ab>\frac{a}{b}$？

(4) 在什么条件下，a^2-b^2是正的？

解 (1) 若$a>0$，则　$2a>a$；

若$a<0$，则　$2a<a$.

(2) $a=a$，当$b>0$时，$-b<b$，所以$a-b<a+b$.

即，$b>0$时，则有$a-b<a+b$.

(3) 若a、b同号，又$|b|>1$时，不等式是正确的；

若a、b异号，又$|b|<1$时，不等式也是正确的.

(4) 当$|a|>|b|$时，a^2-b^2是正的.

2. x 是什么数值时，下列等式是正确的：

(1) $|(x-3)+(x-8)|=|x-3|+|x-8|$；

(2) $|(x-1)(x-5)|=(x-1)(x-5)$.

解 (1) 显然，欲使等式成立必须有 $x-3$ 与 $x-8$ 同号，

即 $\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ x-8\geqslant 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-3\leqslant 0 \\ x-8\leqslant 0 \end{cases}$ 成立．这就是说，

$x\geqslant 8$ 或 $x\leqslant 3$ 时等式成立．

(2) 与(1)类似，必须有 $x-1$ 与 $x-5$ 同号时，等式才能成立．即 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 5$ 时等式成立．

3. 已知 a 是不为零的实数，计算 $\dfrac{\sqrt{a^2}}{5a}$.

解 $$\frac{\sqrt{a^2}}{5a}=\frac{|a|}{5a}\cdot\begin{cases} \dfrac{a}{5a}=\dfrac{1}{5} & (a>0) \\ \dfrac{-a}{5a}=-\dfrac{1}{5} & (a<0). \end{cases}$$

4. 化简：

(1) $\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}$；$(-3<x<2)$

(2) $\sqrt{1-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$. $\quad(\pi\leqslant\alpha<\dfrac{3\pi}{2})$

解 (1) 当 $-3<x<2$ 时，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=-(x-2)-(x+3)\\&=-2x-1;\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&\sqrt{1-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}\\=&\sqrt{\sin^2 36^\circ-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ+\cos^2 36^\circ}\\=&\sqrt{(\sin 36^\circ-\cos 36^\circ)^2}\end{aligned}$$

$= \sqrt{(\cos 54° - \cos 36°)^2}$

$= \cos 36° - \cos 54°$.（$\cos x$在第一象限递减）

上式也可以化成：$\sqrt{(\sin 36° - \sin 54°)^2} = \sin 54° - \sin 36°$.

(3) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}$

$$= \frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha} = -1.$$

（$\because$ $\pi \leqslant \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$， $\therefore |\cos\alpha| = -\cos\alpha$）

5．若 x 和 y 皆为有理数，且 $(x-y\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$，求 x、y的值.

解 由已知

$x^2 - 2xy\sqrt{2} + 2y^2 = 6 - 4\sqrt{2}$，

$x^2 + 2y^2 - 2xy\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2}$.

因为 x、y 是有理数，所以有：

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

解之，得 $x=2$，$y=1$；或 $x=-2$，$y=-1$.

习 题 一

1．指出下列各数哪些是有理数，哪些是无理数？

$-\dfrac{1}{2}$；$\sqrt{7}$；3.1416；π；$\sqrt[3]{-2}$；3.125；$\lg 2$；

$\cos\dfrac{\pi}{4}$；$\sqrt{2}-1$；$\sqrt{169}+12$；1.010010001；3.232232223….

2．若$(x-2)^2+(y+3)^2=0$，x、y 为实数，求 x、y.

3．若$a^2+4a+4+b^2-6b+9=0$，a、b 为实数，求a、b.

4. 有没有满足下列条件的实数？

(1) $x^2+y^2+1=0$；

(2) $x^2+y^2-2x+6y+11=0$；

(3) $x^2-2xy+y^2+3=0$.

5. 比较大小：

(1) 3.16与$\sqrt{10}$；　　(2) 3.1416与π；

(3) $\sqrt[4]{4}$与$\sqrt[6]{\frac{6^3}{8^2}}$；(4) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$与$\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

6. 对于任何实数x，$|x-5|=x-5$ 总能成立吗？为什么？

7. 已知$|m|=|n|$，能断定 $m=n$ 吗？为什么？

已知$|m|>|n|$，能断定 $m>n$ 吗？为什么？

8. 化简下列各式：

(1) $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$；　$(x<0)$

(2) $\sqrt{x^2-4x+4}$；$(x\leqslant 2)$

(3) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$；$(-1\leqslant x\leqslant 1)$

(4) $\sqrt{lg^2 5-lg25+1}$；

(5) $\sqrt{1-2sin25°cos25°}$；

(6) $\frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{sin\alpha}$；$(270°<\alpha<360°)$

(7) $|x+1|+|1-x|$；$(x>1)$

(8) $|x+3|+|x-5|$；　$(-3<x<5)$

(9) $|x^2+4x+4|$；

(10) $|2x+1|-|x-3|$.

9. x 为何值时，下列等式成立：

(1) $\sqrt{(1-x)^2}=x-1$；

(2) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$；

(3) $\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=0$.

10. 求证：不论 x 是什么实数，x^2+x+1 都不能是负数.

11. x 是实数，试比较 x^2+1 与 $2x$ 的大小.

12. x 是正数，试比较 $2-x$ 与 $\frac{1}{x}$ 的大小.

13 是否可以断定 $x+1$ 大于 1？

14. 式子 $(x^2+1)^4-1$ 可以有非正值吗？

15. x 是什么数值时，下列等式是正确的？

(1) $|(x-4)-(x-6)|=|x-4|-|x-6|$；

(2) $|(x-5)-(x-7)|=(x-5)-(x-7)$；

(3) $|(x-7)(x-3)|=|x-7||x-3|$；

(4) $|(x-1)(x-4)|=-(x-1)(x-4)$；

(5) $\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x-0.7}\right|=\frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{|x-0.7|}$.

16. 若 a、b 为有理数，且 $(3a+2b\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$. 求 a、b 的值.

17. x 取哪些实数值时，下列函数 y 有意义？

(1) $y=\sqrt{x^2-9}$；　　(2) $y=\sqrt{lgx+3}$；

(3) $y=\sqrt{-sinx}$；　　(4) $y=lg(-cosx)$.

18．在什么条件下，下列等式才能成立？

(1) $\sqrt{1-\sin\frac{x^2}{2}}=-\cos\frac{x}{2}$；（$x$ 在0°到720°之间）

(2) $(x-3)^2+(y+5)^2=0$．（x、y为实数）

二　代数式

这部分内容以运算为主，它是以后几部分运算的依据和基础．复习时要求注意以下几点：

(1) 要能正确熟练地掌握各种运算法则，灵活地应用代数式的恒等变形知识进行代数式的运算，并注意代数式里变量的允许值范围；

(2) 熟练地掌握因式分解的方法；

(3) 正确理解根式的意义，掌握根式的基本性质，特别要弄清算术根的概念．

基础知识

1．代数式

(1) 代数式的概念　用运算符号把数字和用字母表示的数连结起来所得的式子，叫做代数式．数字或单独的一个字母表示的数，也是代数式．

(2) 代数式的值　用数值代替代数式里的字母进行计算，所得的结果叫做代数式的值．

(3) 代数式的分类

$$
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式（根式）}\end{cases}
$$

2．整式

(1) 整式的有关概念

单项式　只含有乘法(包括乘方)运算或虽有除法运算，但除式中不含有字母的代数式叫做单项式．

多项式　几个单项式的代数和叫做多项式．

整式　单项式和多项式统称为整式．

(2) 整式的运算

① 整式加减法　去括号后合并同类项．

② 整式的乘法　以同底数幂的乘法法则和乘法公式为基础．

同底数幂的乘法法则：

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.　(其中m，n 都是正整数)

乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

③ 整式的除法　以同底数幂的除法法则为基础．

同底数幂的除法法则：

$a^m \div a^n = a^{m-n}$.（m、n都是正整数，且 $m>n, a\neq 0$）

(3) 因式分解　把一个多项式化成几个因式的积的形式

叫做多项式的因式分解.（本单元的因式分解都是在实数范围里进行的，解题时要按题目要求的数域范围进行分解）

因式分解的方法：

① 提取公因式法 如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提取这个公因式，把它写在括号外面，作为这个多项式的一个因式. 用这个公因式去除这个多项式，把所得的商写在括号里面，作为另一个因式.

② 公式法

根据乘法公式，可以得到

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$,

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

用这些公式，可以进行因式分解.

③ 十字相乘法 利用十字相乘法把一个二次三项式分解因式，只要把二次项的系数和常数项分别分解成两个因数，使它们交叉相乘所得的两个积的和等于一次项的系数.

④ 分组分解法 如果给出的多项式不能用上面的几种方法分解因式，可先进行分组，分组后再用以上方法分解因式.

⑤ 配方法 把x的二次式 x^2+ax+b^2 的一部分配成完全平方，一般可用下面两种方法：

(i) 配常数项；(ii)配一次项.

3．分式

(1) 分式的有关概念

分式 两个整式相除，并且除式中含有字母的代数式叫

做分式．分式的分子可以是任何数值，分式的分母可以是零以外的任何数值；如果分式的分母是零，分式就没有意义．

有理式　整式和分式统称为有理式．

分式的基本性质　分式的分子和分母都乘以或除以同一个不等于零的代数式，分式的值不变．

（2）分式的运算

分式加减法的关键是：

通分$\longleftarrow$求最简公分母$\longleftarrow$分解分母．

分式乘除法的关键是：

约分$\longleftarrow$分解分子、分母．

分式的乘方：$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$．（$m$为正整数）

4．根式（无理式）

（1）根式的有关概念

根式　当$\sqrt[n]{a}$有意义的时候，式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式．且有：$(\sqrt[n]{a})^n=a$；

当n是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当n是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$．

根式的性质

① $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$；$(a\geqslant 0)$

② $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$；$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

③ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$．$(a\geqslant 0,\ b>0)$

最简根式　满足以下三个条件的根式叫做最简根式：

① 被开方数的指数和根指数是互质数；

② 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

③ 被开方数不含分母.

同类根式　几个根式化成最简根式以后，如果被开方数都相同，根指数也都相同，这几个根式就叫做同类根式.

同次根式　根指数相同的根式叫做同次根式.

异次根式一定可以化成较高次的同次根式，但不一定能够化成同类根式.

(2) 根式的运算

根式的加减法　关键是把题中各根式化成最简根式，再把同类根式分别合并；如果不是同类根式就写成代数和的形式.

根式的乘除法　关键是把题中各根式化成同次根式，然后应用下列公式相乘除：

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$；$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. $(a\geqslant 0,\ b>0)$

分母有理化　根据分式的基本性质，把分式的分子分母同乘以分母的有理化因式.

根式的乘方　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geqslant 0)$

几个根式的代数和形式的乘方，用类似于多项式乘方的方法进行.

根式的开方　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$. $(a\geqslant 0)$

例　　题

1. 计算：$(a+b-c)(a-b+c)$.

解 $(a+b-c)(a-b+c)$

$=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-b^2-c^2+2bc$.

2. 把下列多项式分解因式：

(1) a^4-4b^4；

(2) $(x^2-6)^2-25x^2$；

(3) $a^2-2ab+b^2-3b+3a+2$；

(4) x^4+2x^2-3；

(5) x^4+4；

(6) x^6-y^6；

(7) $(x-1)x(x+1)(x+2)+1$；

(8) x^3-7x+6；

(9) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$；

(10) $x^4+y^4+(x+y)^4$.

解 (1) a^4-4b^4

$=(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$ （在有理数范围）

$=(a^2+2b^2)\quad(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)$.

（在实数范围）

(2) $(x^2-6)^2-25x^2$

解 I $(x^2-6)^2-25x^2$

$=(x^2-6+5x)(x^2-6-5x)$

$=(x^2+5x-6)(x^2-5x-6)$

$=(x-1)(x+6)(x+1)(x-6)$

解 II

$(x^2-6)^2-25x^2$