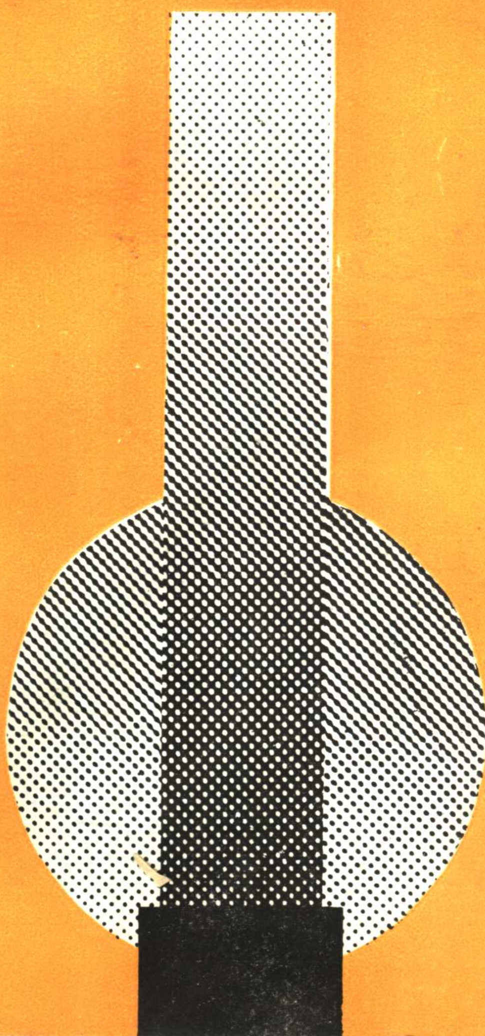
广义函数与数学物理方程

齐民友 编



高等学校试用教材

广义函数与数学物理方程

齐民友 编

高等教育出版社

本书的内容分为两部分:广义函数、数学物理方程. 本书的特点是:强调各种问题的物理背景,在介绍了广义函数这一重要工具的基础上,以基本解作为讨论问题的基本线索来处理经典的数学物理方程问题,同时又简要介绍了偏微分方程比较近代的一些内容.作者尽可能地指出考虑问题的思路,对于重要的方法、技巧,还指出其实质、作用和价值.言简意赅,具有启发性.

本书可作为数学专业的大学生数学物理方程课的教材.

广义函数与数理方程

齐 民 友 编

*

高等教育出版社出版

高等教育出版社照排中心照排

新华书店北京发行所发行

化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.5 字数 150 000

1989 年 4 月 第1版 1989 年 4 月第1次印刷

印数 0 001— 2.330

ISBN7－04－002105－6/O·747

定价 1.55 元

序　言

从 1980 年起，根据中法两国政府协议在武汉大学数学系举办了一个由中法两国教师任教的试验班. 1985 年作者为这个班四年级开设了偏微分方程课，其内容即本书第五—七章，约 30 课时讲完. 这就是写这本书的直接缘起.

但是这样写书的想法却是酝酿了很久了. 多年来，我们开设的数学物理方程课都是按照大体相同的模式，主要讲授一些经典的方法. 这样，学生学了以后，离当代的数学水平还有很大的距离. 如果想在比较新的基础上讲这门课，又担心其他课程跟不上，也担心学生接受不了. 武汉大学的这班学生在学习本课程前系统地学过广义函数论而且并不感到困难. 这个经验促使作者作这样一个尝试: 把广义函数论与数学物理方程合并起来写成一本书.

其实广义函数并不是很难接受的东西. 初学广义函数并不一定需要它的理论基础 —— 拓扑线性空间理论，正如初学数学分析的人不一定要学实数理论一样. 相反，广义函数论有许多有趣的实例，有明确的物理背景而且比较灵活. 与其说是难学不如说是人们对它比较生疏. 掌握了它，就可以以基本解作为基本的线索讨论偏微分方程的一些基本问题: 可解性、解的奇异性与正则性(亚椭圆性) 等等. 这样，比之过去，就离这个分支的前沿近得很多了. 至于一些不可少的经典的内容也都可以得到适当的安排. 同时，作者的另一个想法是，广义函数不只是现代数学家不可少的工具，对于物理学家也是十分有用的(实际上，物理学家老早就在以自己的方式应用广义函数了). 因此，作者力求把各种材料写得具体一些，更接近物理一些. 当然回过来看，仍然感到还应该更

多一些具体的例子.特别是最近读到 R. P. Kanwal, Generalized Functions (Acad. Press, 1983) 一书更感到还可以写得更浅显、更具体一些.用广义函数作为基本的工具还有一个意图:现在我国大学数学系学生在分析方面有许多缺陷,其中最大的一个是对傅立叶(Fourier)变换知道太少.如果讲广义函数就可以最自然地弥补这一不足.这种讲法比之常见的用勒贝格(Lebesgue)积分来讲要更自然更易懂.同时讲广义函数就可以介绍一些现代分析中最常见的内容如单位分解、磨光技巧和卷积等等.所以本书前四章是数学分析课程的一个继续.

当然这就发生了本书与其他课程如何衔接的问题.依据武大中法班的经验,本书是一个学期课的教材,大约60学时即可讲完.当然第一次试用还可以省略不少内容.作者设想,本书可以用于三年级上学期与复变函数同时进行,所以其中有好几处用到哥西(Cauchy)定理、留数计算,估计学生不应有困难.学广义函数也可以暂时不用勒贝格积分.这样,例如局部可积函数只好理解为局部黎曼(Riemann)可积.但是它只是作为广义函数之一例而出现,则理解为黎曼可积是没有害处的.实际上,如果不涉及完备性问题,用黎曼积分大体上也就够了.但是对经典的傅立叶变换理论,勒贝格积分是不可少的.因此本书这一部分是用小字写的.如果这门课在三下开设而与实变函数同时进行,这些困难就没有了.书中还有个别的地方需要用到一些未证的定理,例如广义函数的局部表示要用 Hahn-Banach 定理(也可以不用),本书就只叙述而未证明.也有些地方需要暂时跳过去,这全靠任课教师适当处理了.总之,一个三年级学生想要自学本书内容应该没有大的困难.

另一个问题是应该注意防止学生片面追求抽象化的倾向.从武汉大学的经验来看,时常有一些学生十分喜欢某种完美简洁的数学框架,广义函数也是其中之一,而对物理问题兴趣不大,对复杂的计算更是望而却步.为此,本书比较注意广义函数理论的物

理背景．但这还是不够的，教师有责任引导学生关心具体的物理问题，要从“天上”回到“地上”，因为当代数学发展的潮流正是数学与物理的紧密结合．还要让学生肯“算”、会“算”，不要走到头来只会抽象的道理而连一些最简单的实例也算不出来．为此，希望十分注意习题．如果有的学生感到习题有困难，建议教师再补充一些数学物理的经典方法的习题．

试图用比较现代的方法讲授偏微分方程的书已经不少了．作者写这本书时用得最多的是：Hörmander 在 Lund 大学讲授广义函数的讲义．后来这本讲义扩大补充成为他的巨著：The Analysis of Linear Partial Differential Operators，Vol. 1，Springer－Verlag，1983．另一本书是 G. B. Folland，Lectures on Partial Differential Equations，Springer－Verlag，1983．写作时见到姜礼尚、陈亚浙二同志写的《数学物理方程》(高教出版社，1986)，他们试图以现代的数学理论处理经典的材料使作者得到不少启发．作者还要感谢李大潜同志的谈话，他建议写这本书不必求全，不必顾到各方面的需要，而要注意自己的特色(如果谈得上什么特色的话)．这使作者能比较放胆地写，其目的也就是作为一种尝试以图抛砖引玉而已．

目　　录

第一章　数学物理方程的来源

1. 引言　偏微分方程已经有了很长的历史. 大约在微积分出现后不久, 就开始有了关于偏微分方程的研究. 在很长的时间里, 人们注意力的中心或者是物理问题中的、或者是几何学中的具体的个别的偏微分方程. 这是十分自然的. 因为许多物理的基本规律的数学形式都是偏微分方程. 例如流体力学、弹性力学、电磁学的基本定律都是如此. 这些来自物理的偏微分方程就是常说的数学物理方程. 下面我们将要介绍三个方程 —— 弦振动方程、热传导方程和拉普拉斯(Laplace)方程, 不仅因为它们很简单, 尤其因为它们代表了三类不同的典型方程. 理解了它们的性质就在研究一般的偏微分方程时有所遵循. 推导它们的方法大体上也是相同的, 而且适用于其他的经典的数学物理方程. 这里说"经典的"是因为一些重要的偏微分方程(特别应该提到的是量子力学中的薛定谔(Schrödinger)方程)的推导依据的是全然不同的方法. 它不在我们讨论之列.

大量研究素材的积累自然迫使人们去建立比较一般的理论. 可是比之其他数学分支, 在偏微分方程方面, 进展道路更加迂回. 这在本质上是由于偏微分方程内容极为丰富, 而且它的本性也与例如常微分方程大相异趣. 它需要新的数学理论. 1950 年左右出现的广义函数论(分布理论)提供了我们所需要的武器. 这以后, 人们可以用比较具有普遍性的方法去研究它了. 在这本书里, 我们将要介绍广义函数论的初步知识, 并且利用它来讨论经典的数学物理方程. 应该提一下: 广义函数不仅对于数学物理方程是必不可少的, 而且对于许多数学分支也是必不可少的. 广义函数论

是现代数学很重要的组成部分。

2. 弦振动方程 推导弦振动方程，即为弦振动现象建立数学模型，首先需要了解它所服从的基本物理规律，同时应该作一些简化假设. 弦是一个力学系统，是一个质点组(但是连续的而非离散的质点组，进一步说，它是一个一维的连续统)，所以它的运动应符合牛顿运动定律. 对它的简化假设如下:

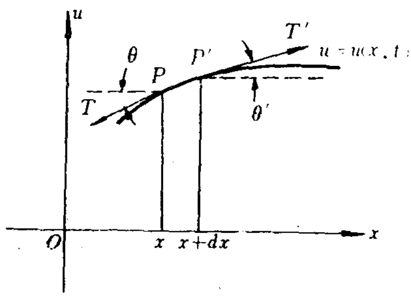


图 1

设弦在未受扰动时平衡位置是 x 轴，而其上各点均以该点之横坐标表示. 弦上各点的位移均假设发生在某个 (x, u) 平面内垂直于 x 轴的方向上. 因此弦上一点 x 在时刻 t 弦的形状是曲线 $u=u(x, t)$. 我们现在设:

1°弦的扰动是小扰动. 这并不是说 $u(x,t)$ 的数值很小而是设 u_x 很小: $u_x \ll 1$, 从而 u_x^2 可以略去不计.

2°弦是“柔软”的. 弦是一个连续体，其所以能维持其形状是由于其各个部分互相之间有力作用，这种力称为内力. 如果要使弦的形状改变就必须抵抗其内力而作功. 所谓“柔软”，是对其内力的性质作的一种规定，即规定内力必为切线方向的张力，所以如果想把它扭弯，即在法向发生形变，并无内力抵抗，这样就称它为柔软的. 如图 1，弦在 P 以左和 P' 以右的部分各以切向张力 T

与 T' 作用于 $\overset{\frown}{PP'}$，而作用点各为 P 与 P'，其方向分别指向 P 的左方与 P' 的右方，即由 $\overset{\frown}{PP'}$ 之外的部分作用于 $\overset{\frown}{PP'}$.

由假设 1° 可以推导出 $T=T'$. 推导过程这里从略，有兴趣的读者可以参看吉洪诺夫与萨马尔斯基著：《数学物理方程》(黄克欧等译，高等教育出版社 1956 年出版)，其中有大量关于物理知识的讨论，是很有用的.

在建立数学模型时，这种简化假设是必须的. 作什么样的假设需由所要解决的问题的性质以及所需的精确程度而定. 过多的假设常使所得的结论不反映客观情况而失去价值，过少的假设则会使所得的模型过分复杂. 总之，这是一个实验与实践的问题而不是理论问题.

建立模型的下一步是分析弦上一小段——图 1 的 $\overset{\frown}{PP'}$，其中 P' 和 P 点的坐标差为 dx. 这是一个"微元". 它必须足够小，使得我们可以无视其内部各点的差别而认为其各点的状况都是均匀的，凡比 dx 更高阶的量均可略去. 它又必须足够大，使得可以忽略微观效应. 可以认为描述其运动的函数都相当规则. 这是具有普遍意义的. 大凡在讨论连续体的问题时，总是这样作的.

上面说的微元，时常说是一种"物理无穷小".

现在把 $\overset{\frown}{PP'}$ 作为一个运动的质点来考虑. 设弦是均匀的，其密度 ρ 是一个常数. 因其长为 dx 故质量为 ρdx. 加速度为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

弦的其余部分作用于它的力是 P 与 P' 两点指向外的张力 T. 在 x 方向，其分力为

$$
\begin{aligned}
T'\cos\theta' - T\cos\theta &= T\left[\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta'}} - \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}\right] \\
&= T\left[\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(P')}} - \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(P)}}\right] \\
&= 0. \quad (u_x^2 \text{ 可以略去.})
\end{aligned}
$$

u 方向的分力为

$$T'\sin\theta' - T\sin\theta = T(\mathrm{tg}\theta' - \mathrm{tg}\theta)$$
$$= T(u_x(P') - u_x(P))$$
$$= T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx .$$

因此由牛顿第二定律有

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx ,$$

或

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2 = T/\rho . \tag{1}$$

(1) 称为弦振动方程.

3. 热传导方程 现在研究均匀物体中热的传导，因此认为物体的密度 ρ、比热 c 与导热系数 k 均是常数. 若记该物体中一点的坐标为 (x, y, z)，时刻 t 该点处的温度为 $T(x,y,z,t)$. 取物体内包含点 P 的小长方体为上面说到的微元. 我们讨论这个微元内的热平衡.

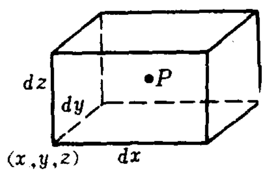


图 2

在时刻 t 到 $t+dt$ 内，该微元内各点的温度变化，以 P 点为代表是

$$T(P, t+dt) - T(P, t) = \frac{\partial T}{\partial t}dt .$$

使温度升高 $\frac{\partial T}{\partial t}dt$ 所需的热量(热能之量) 是 $c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dtdxdydz$ (该微元的质量为 $\rho\, dxdydz$).

这里消耗的热量应该由物体内部的热源(例如在物体内部发生着化学变化时就会有这种热源) 与微元外向微元内的热传导来补充. 现在只考虑传导现象. 热传导服从一个经验定律——傅立叶实验定律:

通过面积 dS 在 dt 时间内沿法线 n 方向传导的热量是 $-k\dfrac{\partial T}{\partial n}dSdt$. 这里出现负号是因为热量由高温处流向低温处. 故当 $\dfrac{\partial T}{\partial n}>0$ 时, 热量实际上是向 $-n$ 方向流去. 由此, 在 dt 时间内通过微元左右两侧(面积 dS 均为 $dydz$) 流入(在左侧是沿 x 方向流入, 在右侧是沿 $-x$ 方向流入) 微元的热量是

$$kdt\left(T_x(x+dx,y,z,t)-T_x(x,y,z,t)\right)dydz$$

$$=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ dxdydzdt.$$

沿前后两侧和上下两侧流入微元的热量可以同样计算. 最后, 由热的平衡可得

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dxdydzdt=c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\ dxdydzdt,$$

或者

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t},\quad a^2=k/c\rho. \qquad (2)$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是一个极重要的算子, 称为拉普拉斯算子, 记为 Δ.

(2) 称为**热传导方程**.

如果在物体内还有热源, 则需要一个函数来标志其强度. 记这函数为 $f(x,y,z,t)$, 它表示在 dt 时间内, 在该微元中产生的热量是 $f(x,y,z,t)\ dxdydzdt$. f 应该是由实验给出的, 或者由其他物理规律导出. 总之, 在我们这里认为是已知的.

在以上过程中，基本的物理定律是热的平衡 —— 即能量守恒. 我们可以认为傅立叶实验定律是一种简化假设，因为它只是在一定情况下适用的近似的经验定律. 当它不适用时，得到的数学模型可以大不相同. 参数 c、k 与 T 无关也是重要的简化假设. 当然 c、k、ρ的均匀性也是一种简化，但这并不重要，抛弃这一假设并不导致比(2)复杂得多的方程.

4. 拉普拉斯方程和波阿松 (Poisson) 方程

现在考虑静电场中的电位 $\varphi(x, y, z)$，并设场中有电荷分布，其密度为 $\rho(x, y, z)$. 如果电场强度为 $E(x,y,z)$，则由定义，$E=-\mathrm{grad}\varphi$. 高斯定律告诉我们，

$$\mathrm{div}E=\rho .$$

这里的高斯定律采取这样简单的形式是因为我们采用了特定的单位制. 将 $E=-\mathrm{grad}\varphi$ 代入此式就得到 φ 所适合的方程

$$-\mathrm{div\,grad}\varphi=-\Delta\varphi=\rho . \tag{3}$$

它称为波阿松方程. 特别是在自由电场(即 $\rho=0$ 的情况)中，电位适合拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi=0 . \tag{4}$$

这里我们是从一些物理定律推导出方程的. 如果我们分析一下这些定律导出的过程，仍可看到采用了微元的分析和对一些实验事实的概括. 例如库伦 (Coulumb) 定律就是一个实验定律，而高斯定律是依据于它的. 凡实验定律都包含了对实际情况的某些简化或理想化，或只是某种近似. 这在性质上和前两个例子中的简化假设是一样的.

拉普拉斯方程不仅出现在静电场问题中. 例如设热传导方程(2)的解 T 与时间无关 —— 这种温度场称为定常温度场——，则方程(2)成为

$$\Delta T=0 .$$

所以，拉普拉斯方程也可以描写定常温度场. 不但如此，它还可以描写引力场势等等. 概括地说，它所描写的自然现象常是稳恒的、

定常的，亦即与时间无关的. 拉普拉斯方程可以描述种种不同的现象，其他方程也如此：热传导方程还可描述扩散现象，弦振动方程可以描述传输线中的电流或电压(当参数适合一定条件时)，还可描述轴的扭转振动等等. 这种情况正是数学物理方程作为描述自然现象的工具的力量所在. 实际上，这三个方程各是一类方程的典型. 各反映一类自然规律性. 尤其是，这三类方程的数学性质各取决于一个二次型的性质. 在本书中，我们将依据这个二次型将方程分类，并逐类的进行讨论.

5. 定解条件 上面的例子告诉我们，这些数学物理方程都是一般的物理定律的表现，它们反映很广泛的事物. 因此，为了刻划一个具体的对象，例如一定形状、一定材料的物体在某特定情况下的温度，就需要一定的补充条件——不只是几何形状、材料性质. 这些补充条件称为定解条件. 在数学物理方程理论中，我们总是联系着一定的定解条件来研究一个方程的. 这就叫做一个定解问题.

常见的定解条件有两大类. 一类是，对于描述随时间演变的方程，如(1)和(2)(这类方程统称为发展方程)，需要给出在初始时刻的状态. 例如对于(2)，就应该指定初始时刻(设为 $t=0$) 的温度:

$$T|_{t=0}=f(x,y,z).\quad (f \text{ 已知.}) \tag{5}$$

对于(1)，则因为它是一个力学运动，需要的是初始位移和初始速度

$$u|_{t=0}=f_0\ ,\quad u_t|_{t=0}=f_1\,(f_0\ ,f_1 \text{ 已知}). \tag{6}$$

(5)和(6)称为初始条件.

如果我们研究一个有界区域 Ω 中的物理现象，例如 Ω 内的温度分布或静电场，或者一段弦 $[0,l]$ 的振动，则区域边界 $\partial\Omega$ (或$\{0,l\}$) 上的状况将是十分重要的，因为它反映物体与周围介质的相互作用. 现以方程(2)为例来说明.