走向数学丛书

凸性

史树中 著

湖南[illegible]出版社

凸　性

Convexity

史树中

Shi Shuzhong 著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092 毫米　32 开　印张：4.375　字数：90.000

1991 年 12 月第 1 版　1998 年 4 月第 2 次印刷

ISBN7—5355—1378—6／G·1373

定价：8.90

作者简介

史树中，男，1940年2月生，浙江镇海人。1961年毕业于华东师范大学数学系，并留校任教。1976年起在南开大学数学系任教，1979—1981年赴法国巴黎进修和参加研究工作，1984年被特批晋升为教授和博士生导师。

1987年经国家科委、人事部批准，授予"有突出贡献的国家级科技专家"称号。现为南开数学研究所教授，中国数学会常务理事。

早年从事函数论与泛函分析方面的研究，后在数论、控制理论、非线性分析、偏微分方程、数理经济学、计量经济学、计算数学等许多不同领域中都有过研究工作，已在国内外发表学术论文40余篇。目前主要从事非线性分析和经济数学方面的科研教学工作。在非线性分析方面、尤其对非光滑分析的研究在国内外有较大影响，并在1987年获得国家教委科技进步二等奖。已培养了3名博士毕业生和20余名硕士毕业生。

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏。我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解。这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量用深入

浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容。这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用。显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事。首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解。从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说。但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为"走向数学"撰稿。这很值得高兴与欢迎。

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套"走向数学"丛书，谨致以感谢。

目　　录

第一章　凸　集

§1.1　凸=高于周围

我们知道汉字起初是一种象形文字。但是今天的汉字绝大多数已无形可象. 即使如"日月山水"等几个最"象"的字来看，不看它们的甲骨文原形，也很难"象"出来. "凹凸"二字似乎是仅有的例外. ①按照通常汉语词典中的解释，"凹"的含义是"低于周围"，而"凸"的含义是"高于周围"，完全如同这两个字所表现的形状.

我们这本数学小册子的题目叫做"凸性"，顾名思义，就是要研究一种"高于周围"的性质. 它是用来刻划物体的形状的，因而

① 对此笔者请教了古文字学家林沄教授. 他的回答摘要如下："关于'凹凸'两字实在不属于我们古文字学的范围. 在先秦古文字中至今没有见到过。……东汉许慎编的《说文解字》中也没有这两个字. 出现这两个字最早的著作现在查到的是晋代葛洪(281?—341)著《抱朴子》. ……可以推论，凹凸这两个字是魏晋时代新造的象形字，用抽象的几何图形概括洼下和突起这两个概念. 中国文字的发展一般规律是原始象形字、会意字被形声字取代，凹凸两字却相反. 这是很有趣的."

是一种几何性质.说到“高于周围”,自然是指某个几何图形的某个点的性质.但是这样的说法很含糊,因为“高低”是相对的,“周围”也有待明确.

为了使这本小册子适合于中学生水平,下面我们将主要讨论平面图形..但是以后我们将看到,这并没有使我们的讨论有很大的局限性.对于立体图形以及更一般的图形来说,绝大部分的结果都是类似的.

我们现在来琢磨一下,对于一个平面图形来说,日常所说的凹凸是什么意思.这点可以从考察“凹凸”这两个字谈起.从这两个字来看,所谓“低于周围”和“高于周围”的含义都是指的这两个字的边界(框)的中上部与周围的比较.因此,首先我们可以肯定,“凹性”与“凸性”都是一个图形的边界上的点的性质。既然它们都是对图形而言的,我们就应该注意到,对于“凹”与“凸”所说的“低于周围”与“高于周围”的含义是不一样的.从“凸”字来看,其边界点上的“凸点”不但比周围的边界点高,也比周围的 在图形内部的点高;而从“凹”字来看,其边界上的“凹点”虽然比周围的边界点低,但并不比周围的在图形内部的点低.注意到这点是很重要的.这就是说,“凹”与“凸”的区别并不是“凵”和“冂”的区别.对于后两者来说,把两者之一颠倒一下,就没有区别了,而“凹”、“凸”两字不管怎么变方向,由于还要考虑图形的内部,都不会使原有的“凹性”与“凸性”颠倒.就象对一个齿轮来说,人们对齿轮边界上的点的“凹性”与“凸性”,并不因为齿轮的位置变化而改变看法.这同时也说明,“高低”都是指所考察的点相对于对图形来说的某一方向而言的,而不是对事先已定好的与图形无关的固定方向而言的.

现在我们对“凹凸”的认识比原有的粗略的感觉已经进了一步.但是为了更确切地刻划“凹点”与“凸点”,还需作一些更明确

的规定.

"定议1" 对一个(平面)图形来说,其边界上的一个点称为凸点,是指对于某个方向而言,它比在其周围的图形内部的点要高;其边界上的一个点称为凹点,是指对于某个方向而言,在其周围的比它低的点都是图形内部的点.

这个"定义"已对我们通常理解的凹凸有所加工,其中最引人注目的是我们只让所讨论的点与其周围的图形内部点比"高低",而不问其如何与周围的图形边界点比"高低".同时,这里对凹点作了比"低于周围"更确切的说法.这些和我们日常判断凹凸稍有不同.我们所说的凹凸比通常理解的要宽松些,其中允许该点周围的图形边界上的点与该点"不分高低".于是有可能出现既是凸点也是凹点的"平点".我们通常理解的凸点和凹点可以称为**严格凸点**和**严格凹点**,它们将被定义为*不是凹点的凸点和不是凸点的凹点*.这时,我们可以看到,严格凸点将对某一方向比其周围的边界点高,而严格凹点则反之.但是把这两个性质作为严格凸、凹点的定义显然是不合适的,因为如果不考虑图形的内部,这样的定义是无法区别(严格)凸与凹的.

虽然我们已在这里抓住了确定凹性与凸性的关键,但是这个"定义"还不能算是一个完整的数学定义,因为什么是"图形"、什么叫一个"图形"的"边界"和"内部"、什么叫一个点的"周围"、怎样衡量"高低"等等都需进一步说明.不过,对于中学平面几何中所遇到的三角形、多边形、圆等图形,这些概

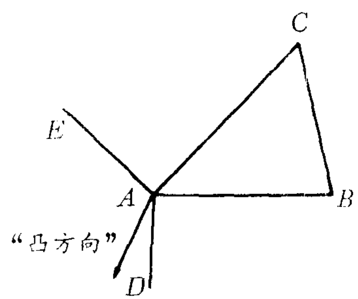

图1 三角形

念都是明确的. 我们先来对这些图形讨论它们的边界点的凹性与凸性.

最简单的平面图形是三角形. 三角形的内部与边界的含义都很清楚. 我们可以看到，三角形的边界上的点都是凸点，但只有三个 顶点是严格凸点. 对于三条边的内部的点来说，指向三角形外部的所在边的垂线方向就是“定义”所要求的方向. 对于这样的方向来说，该点周围的图形内部的点都比它低. 同时它周围比它低的点也一定是图形内部的点，即它们同时也是凹点. 而对于三角形的顶点来说，我们总能找到某个“凸方向”，使得对这个方向而言，它高于周围的三角形的内部点和边界点. 例如，在图 1 中，对于三角形 ABC 的顶点 A 来说，DA 与 EA 之间的任何向三角形外的方向都是“凸方向”，即使 A 高于周围的图象内部点的方向，这里 DA 垂直于 AB，EA 垂直于 AC. 但不再存在任何方向，使得对该方向而言，低于它的周围的点是三角形内部的点. 因而它们都是严格凸点.

对于多边形来说情况有点不同. 一个多边形的边界上的点不一定都是凸点；即并非是每一个多边形的顶点都一定是（严

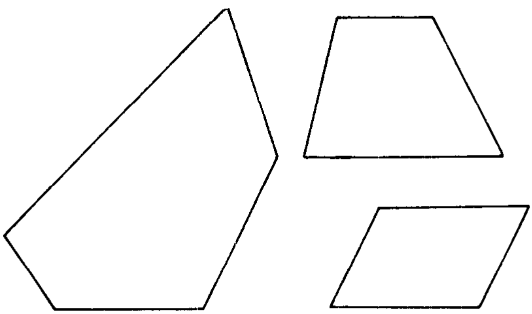

图 2　凸多边形

格)凸点.所谓**凸多边形**就是其所有边界点都是凸点的多边形.它也就是每一内角都小于 π 的多边形.平行四边形、梯形、正多边形等都是凸多边形(见图 2).验证凸多边形的边界点的凸性的方向与三角形情形一样选择.但是只有凸多边形,而没有“凹多边形”,即不存在其每一边界点都是“凹点”(从而其所有内角都大于 π)的多边形.这是因为多边形的内角和为 π 的(边数－2)倍,所以它至少有 3 个内角小于 π.

上述这件事有普遍意义.如果我们称一个其所有边界点都

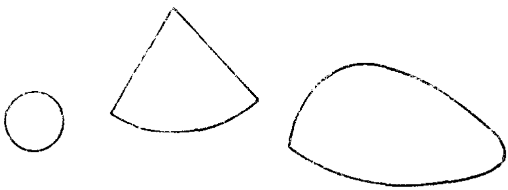

图 3　凸图形

是凸点的图形为**凸图形**,而其所有边界点都是凹点的图形为**凹图形**,那么我们可以看出,常见的图形中凸图形很多.除了凸多边形外,圆是一个例子,其中“凸性方向”就是边界点所对应的半径方向.圆心角小于 π 的扇形是又一个例子.一般的凸图形有如图 3 中那样的形状.凹图形则可看作凸图形的余集再并上其边界.这种图形并不多见.事实上,凹图形总是无界的,即无法把它限制在一个大圆内.这就是说,就如上面所说“凹多边形”是不存在的那样,*有界的凹图形是不存在的*.这件事即使对于用一条“绳圈”(无交叉点的连续封闭曲线)围成的图形来说也并非显而易见.本丛书中姜伯驹教授写的《绳圈的数学》将证明一个绳圈的“外角和”公式.利用它可以象证明不存在“凹多边形”那样来

证明不存在(有界的)“凹图形”.但对于一般情形来说则无法利用这样的公式.由此也可说明这本小册子为什么象其它一些类似主题的书一样,题目中只带“凸”字,而不带“凹”字.虽然“凹”似乎是“凸”的反义词,其实“凹性”对于有界的图形(它自然比无界的图形有用得多)来说不可能象“凸性”那样成为一种整体的几何性质.

还有一点要注意,对于一个图形来说,它的边界点并非不是凸点就一定是凹点.有可能存在非凸非凹的“拐点”.例如,当图形的边界的一部分有点象正弦函数图象时,对应正弦函数零点处的边界点就是非凸非凹的(见图4的 A 点).这样一来,图形边界上有非凸点并不说明一定有严格凹点.因此,一个非凸图形的边界上是否有严格凹点并不是显然的.我们以后将证明下列结论:*每个非凸图形的边界上至少有一个严格凹点.*

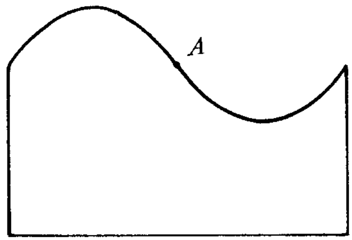

图4 有非凸非凹点的图形

§1.2 凸=四周鼓出

我们在上节已把人们日常对凹凸的感觉和理解精确为几何观念.虽然要把它们进一步数学形式化还需再加工,但这对训练有素的数学工作者来说已不是难事,这些都是属于“去粗取精,去伪存真”性的工作,是科学研究的开始.科学研究的深入将是由科学观念出发的“由此及彼,由表及里”.

然而，在做“由此及彼，由表及里”的工作以前，我们先要考察一下已形成的科学观念是否很有利于做这样的工作，是否还有更好的提法. 从一个非常复杂的概念出发的 研究是很难进行的. 因此，人们总是寻求一个尽可能简单的理论出发点.

用这样的要求来看待我们在上节提出的凸性概念，人们有理由感到不满足. 根据上节提出的“定义”，要鉴别一个图形是否是凸的，必须看它的边界上的每一个点是否是凸的. 只要有一个点不是凸点，它就不是凸图形. 由此出发来检验图形的凸性、研究凸图形的性质自然是十分费劲的. 这样，如果有可能的话，我们应该设法来找一个更好的凸图形的定义.

我们现在来看看一个凸图形还有什么更简明的刻划方式. 由于凸图形的每一个边界点都“高于周围”，从而从总体来看，它的四周看来都应是鼓出的. 因此，我们可以尝试用“四周鼓出”出发来刻划凸性. 通常的汉语词典里，“凸”总是只有“高于周围”一种解释，即只认为它是边界点的一种局部几何性质. 而“四周鼓出”是边界的一种整体性质. 这种对“凸性”的解释虽然未能在通常的汉语词典里找到，却也是常被人作如此理解的. 同时，在通常的汉语词典里，对“鼓”字的一种解释是“凸起”. 这里显然是就边界的整体性质而言的. 因此 ，我们在本节的标题中写下“凸＝四周鼓出”并没有标新立异.

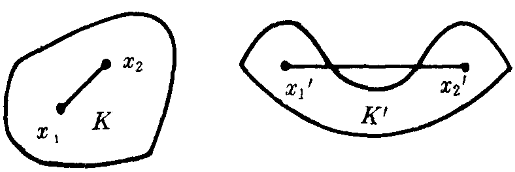

图 5　凸图形和非凸图形

那么“四周鼓出”将如何来精确化呢？“四周鼓出”所导致的结果为：如果对这个图形内部的两个点用直线段连结，则这个直线段不会跑到图形的外面去；否则说明有一段边界没有鼓出．如图 5 中，K 是一个“四周鼓出”的凸图形，x_1、x_2 是其中的两点．则连接它们的直线段也在 K 中．而非凸图形 K' 则没有这样的性质．

由此我们可以考虑：能否用“图形中的点的连接直线段还在图形中”来作为凸图形的特征？如果可以的话，我们可以发现，这里只涉及一个概念，那就是连接两个点的直线段；而不是象上节中根据“高于周围”所提出的凸图形的“定义 1”，要涉及“内部”、“边界”、“方向”、“高低”等等一系列概念．因此，如果用它来作为“凸性”的定义将是非常简明扼要的．由于它只涉及“点”、“直线段”以及“是否在 K 中”，由此出发的定义，可以对一般的集合来提出．具体叙述如下：

“定义 2” 某集合称为凸集，是指连接该集合中的任何两点的连接直线段上的点都在该集合中．

这个“定义”已经非常准确．但是作为数学定义来说，它还有不确切的地方．如该集合是在什么范围内考虑的，什么叫“直线段”等等．因此，我们仍对它冠以引号，表示它还不是真正的数学定义．然而，对于直线、平面、(三维)空间来说，这个“定义”的含义是完全明确的．我们由此出发就可以判断它们的子集是否是凸集了．

把这个“定义 2”与上节的“定义 1”作比较，可以发现“定义 2”有许多优越性．除了简明扼要、便于验证等等外，这个“定义”的优点还在于它的一般性．例如，根据这个“定义 2”，直线段、圆、球都是凸集．而根据“定义 1”，如果在平面上考虑，直线段不是凸图形，因为它没有“图形的内部”．这自然不太合理．为了避

免这种不合理，可以说："直线段对于直线来说是'凸图形'"；这时的"凸图形"的"定义"仍可如"定义 1"那样提出，但其中的"内部"、"边界"等都将对直线而言.虽然这种解决办法使得我们也能一般地说：××(集合)对于××(空间)来说是"凸图形"或"凸集"，但它显然远没有上面"定义 2"那么一般和简便.

"定义 2"把凸性的观念大为简化了.可是马上发生一个问题，"定义 2"与"定义 1"刻划的是否是同一种"凸性".一个"定义 2"意义下的凸集，当它是一个"图形"时，它是否一定是"定义 1"意义下的凸图形？反之，一个"定义 1"意义下的凸图形是否一定是"定义 2"意义下的凸集？结论似乎应该是肯定的.然而，当你真试图去证明这些肯定结论时，马上会发现事情远不是象表面上看来那样简单.你会觉得事情好象是对的，但却说不大清楚.同时，你还会感到，我们上面把两个"定义"都打了引号是有道理的，因为这两个"定义"自身也有许多不清楚之处，用不清楚的"定义"来证明清楚的定理是不可能的.

事实上，这里涉及一条相当深刻的凸性基本定理，它说明：**边界上每一点的"高于周围"的"局部凸性"与整个边界的"四周鼓出"的"整体凸性"是一致的**.其证明相当不简单.而"凸性"的众多应用也恰好都是由此引起的.我们以后将看到，这本小册子的全部内容都是围绕着这条定理转的.因此，下面我们的主要任务将是严格地证明它.不过，为此我们首先需要把我们的数学框架和定义搞严密.这是我们在下一节中要做的事.

§1.3 记号与定义，平面 R^2

现代数学的严格性意味着它是建立在集合论和公理化方法

的基础上的. 为严格刻划凸性,我们首先要对平面(以至一般的 n 维空间)给出尽可能明确的公理化定义. 这里要引进一系列在中学数学中不常用的记号. 这些记号所涉及的数学深度其实并未超出中学数学的范围. 只是换了一种面孔,可能会使人感到不习惯. 虽然我们有可能把它们完全翻译成中学课本中的记号,但是其代价是使叙述大为累赘,并且还可能不太严格. 好在掌握这些新的记号并不困难,而熟悉了这些记号后,对今后学习现代数学大有好处.

如同解析几何中所说,直线与实数全体可看作一回事,平面可看作两个实数构成的有序对(x,y)的全体. 因此,如果记

$\boldsymbol{R}$:实数全体或直线上的点全体.

那么平面就可表示为 $\boldsymbol{R}^2 := \{(x,y) \mid x\in \boldsymbol{R}, y\in \boldsymbol{R}\}$

这里

$\in$:集合论的"属于"记号. $a\in A$ 表示 a 是集合 A 的元素. $\notin$ 则表示"不属于".

$:=$: 表示这是个定义等式. ①

而 $\boldsymbol{R}^2$ 是按下列通常的集合表示方式来表示的:

集合 $A:=\{$元素 $a\mid$元素 a 所具有的性质.$\}$

我们以后将用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 表示平面(或空间)上的点. 这与中学课本上用大写字母表示点、小写字母表示数的习惯不太一样. 在这种情况下,如果再用(x,y)来表示点的座标就有可能引起混淆. 为此,我们将把点的座标用上标来表明. 例如,

$$x=(x^1,x^2),\quad y=(y^1,y^2)$$

等等. 之所以用上标而不用下标来标明点的座标,是因为我们准

---

① "$:=$"也常有人代之为"$\triangleq$".