

数学的历史、逻辑和基础资料选辑

非标准分析 (II)

中国科学院计算技术研究所九室编
新乡师范学院数学系印

一九七八年五月

目 录

前 言	-----	1
-----	-------	---

<一>

非标准分析座谈会纪要	-----	2
标佳分析与非标准分析 林友威	-----	13
在欧域 $*R$ 上描述微积分的基本概念 王有通	-----	16
关于运用 非标准分析 讲授初等		
微积分的一些体会 袁荫	-----	36
$*R$ 的基欧以及其它问题 杨安洲	-----	45

<二>

模型论的元欧亨领域 L A 斯亨	-----	49
模型论概念 R L 戈特		
什么是非标准分析 W A J 卢森堡 陈晋钺 康宏盛译	-----	108
非标准分析介绍 A 戈罗斯	-----	151
非标准分析 一个说明 勒维芝	-----	168
某些非可基米德域上的函数论 A 罗宾逊	-----	192
非标准分析对量子力学的应用 麦鲁克	-----	223
热力学极限的 非标准 研究 M 狄里斯登著	-----	201

<三>

A 罗宾逊著《非标准分析》四 五 九章译文

第四章 一般拓扑学	-----	311
第五章 实变函数论	-----	347
第九章 选取的课题	-----	374



中国科学院数学研究所印刷的《微学的历史、逻辑和基础资料选辑——非标准分析》第一辑引起了不少同志的关心。由于份数少，不能满足有关同志的需要。新乡师院微学系、贵阳师院微学系等曾先后进行了翻印。这一辑是第一辑的续集，除 A. Robinson 书的三章外，还收集了一些通俗介绍，包括国内几位同志写的文章。此外，还收集了光在男子力学、热力学中的应用的译文。

如何把非标准分析用于教学工作，编写好的教材，这是一项重要的研究工作，也是国内许多同志关心和正在尝试的。美国数学家 Keisler 著的《初等微积分》经过几年的试教，已正式出版，这是用无限小方法编写的第一本现代化的微积分教材，值得参攷。关于该书的书评可参阅《自然科学争鸣》杂志 1977 年第五期袁荫同志的文章《非标准分析介绍（下）》。

对于有些问题具有不同看法的，我们希望展开讨论。

我们的水平很低，难免缺点，欢迎批评指正。

本册，新乡师院微学系负责印刷工作，我们十分感谢他们的支持。

张锦文

1977. 11. 25.

非标准分析座谈会纪要

编者说明 1977年八月分 中国科学院计研所
在北京召开了一次微分几何暑期讨论会。会上
专门用一天时间座谈了非标准分析问题。我们将
这次讨论会发言整理了一下 写成了这个纪要，
发表出来 供对此感兴趣的老同志们研究时参考

张锦文 中国科学院计研所

非标准分析近十几年来发展迅速 国内外研究它，关心它
的人很多 国内有一些大中城市已举办了有关非标准分析的讨
论班 研究组 有结合台学习班 克尼《数学手稿》 欧几里德微
分几何学 为后 研究非标准分析 有台在研究非标准分析
非标准理论问题 有台在研究非标准分析（其另具序于物理学的
一些方面） 有台在研究非标准分析 非标准分析才刚刚开始
一些台老数学家 也有一些物理学家 有台在研究非标准分析 中
国教学和知识青年在探讨非标准分析 今天座谈会也是一个
交流经验 交换意见的机会 当然，国内外对于非标准分析也有些
不同的看法 这可以通过科学实验和百家争鸣来解决。

杨朝柱（广东师范学院）

非标准分析是一新的数学分支 应该深入研究 我认为，
非标准分析微分几何 对于几何变换的新的反映 比标准分析深入了
一步 微分和物理学要结合起来研究。非标准分析将有可能在
基本粒子的研究中发挥作用

从微积分的教学方法来讲，“ ε - δ ”方法仍应继续理解，近年来在美国的一些高级中学、工科院校，试用非标准分析的方法教授微积分，并与通常的办法作了细致的对比分析。试验结果，肯定了新方法的优越性。

对于马克思的《数学手稿》，一定要认真学习，绝不在抱怀疑态度。马克思在一百多年前就已科学地预见到点集可分的微分三角形、比点又小。我觉得非标准分析完全证实了马克思的这一科学预见，如何通俗地引入 $\ast R$ ，搞一点公理化的处理方法。结合《数学手稿》的精神讲授微积分，真是一件很有意义的工作。

胡虫华（中国科学院计算所）

非标准分析的问世是数学发展史上的一件大事。它是在微理逻辑（主要是模型论）的直接推动下发展起来的。微理逻辑是以数学方法为研究对象的。对于数学的发展有深刻影响。非标准分析不过是这种影响的一例。

我们认为，在非标准分析这一数学方法得到充分的发展之后，将能给人们提供一种强有力的分析数学工具。

微理逻辑的新近正当促进整个数学的发展，微理逻辑（主要是集合论、递归论、模型论、证明论）所提供的研究方法（如形式化方法）在数学研究中是可以普遍使用的。因此这些研究方法是无根据的。数学基础研究中的许多重大问题，其中就有不少后期是借助于形式化方法才得到彻底解决的。

最后，还要说明一点，不能认为非标准分析是对标准分析的否定。

沈有鼎 (中国社会科学院哲学研究所逻辑组),

构造性分析的创始人比绍浦 (E Bishop) 从构造主义立场出发 会猛烈地非构造性的做数学。这是错误的。最近 他又在美国数学会报上写文章激烈反对非标准分析方法 这样发展下去 如何评价非标准分析的问题将会成为一个带有世界性的做数学界的争论问题。

目前, 我们国内对于非标准分析很注意。我认为 运用唯物辩证法的观点 阐明非标准分析的本质和意义 在国内广泛地传递一新的做数学分支 发展下去可能会有世界性的意义 我希望, 我国对于非标准分析的研究工作将赶上世界上的先进水平, 进一步促进做数学的发展。

蒲保明 (四川大学)

非标准分析在二十年代六起以来 逐渐引起了许多做数学工作者极大的兴趣和注意。愈来愈多的人投入了这方面的研究 这一新学科的基理理论和方法逐步得到了改进和完善 同时也把这种新学科所产生运用到做数学的许多分支和物理科学方面取得了不少成果 这是主流。另一方面 在国内外也有一部分做数学作者对非标准分析的基理和它的意义抱怀疑 怀疑态度 甚至有人对它进行责难和批判

我们由于从事一般拓扑学的研究 发现近年来出现了非标准拓扑这一新分支 促使我们从事非标准分析的研究 对于这一新学科 我们有以下两点体会

一、在做数学创建的初期 曾广泛地运用了无限小方法 莱布尼茨提出了包含着“无限小的数”的扩大实数系的问题。这一问题提出近三百仍没有得到彻底解决 直到一九六〇年, 在做理逻辑 (模型论) 的蓬勃发展的推动下 非标准分析经过

了长时期的厚养后终于去了。这是数学发展史上的一件大事。

二、非标准分析是一种重要的研究方法。例如，“算子”的概念，就是一个新的数学概念，在拓扑空间的研究中是一个重要的工具。目前，这种研究方法已经取得了不少的研究成果。

我认为，非标准分析给数学研究提供了新的研究方法。今后，我们应把标准分析和非标准分析这两种方法很好地结合起来应用，把研究工作搞上去。

王统荫（北京大学）

在极限理论中，无穷小被理解为一种以0为极限的变量。此后就导致了对于实在无穷小的否定。这是极限论的不足之处。但是，在微积分学的发展史上，极限论是有很大贡献的。本世纪六十年代通过模型论的方法，即非零又非有限微算的无穷小算子又作为科学的微算重新得到肯定，并在此基础上建立了非标准分析。

目前，极限理论与非标准分析中的无穷小方法这两种并行的数学分析方法，这两种方法是相互补充、相互促进，是对立的统一。

当代著名数理逻辑学者哥德尔是一位很成熟的数学家。他认为，非标准分析时常可以使数学证明得到简化，而证明的简化有助于发现新的数学事实。他说，有理由相信，未来的分析将是这样或那样的非标准分析，这些话值得我们认真考虑。

非标准分析扩大了数学的论域。这是一个很大的进步。我认为，要从历史发展的角度来看非标准分析，应包括这种新的数学研究方法。

袁荫（北京电力设计公司工人大学）

开斯勒尔写的《初等微分》（1976年出版）是一本运用非标准分析方法写成的教科书。该书作者在微积分的研究中有一系列极重要的贡献。他花费了七、八年的时间才写出了这本书。该书的初稿经过多次做做实践、反复修改，在理论上才逐渐筑起龙来的。我认为，这是一本具有较高科学水平的近代微积分学的教科书。在这本书中，作者提出了一个很重要的问题：在现实的物理空间中，直线究竟是个什么样子？像 R 呢？还是更像 *R ？

构造性分析的创始人比绍普最近写文章激烈反对开斯勒尔的这本书，将会引起人们的关注。我认为，应该在更长时间的数学实践中来检验这本书的科学价值，而不应过早地做出最始的判断。我确信，这本书将会广泛地影响着人们对微积分的认识。

黄顺基（北京师范大学）

非标准分析是一门年青的、富有强大生命力的数学科学。它不同于标准分析的一个根本点在于引入无穷小量。无穷小的引入，在数学发展史上又一次飞跃。其实，这意义必将为数学、物理学未来的发展所证实。

从数学方面来说，实无穷小量的数学是从认识实数逻辑的发展。自然数（ N ）在数（ Z ），有理数（ Q ），实数（ R ）。这是人类认识数学的历史，也是全部标准数学赖以建立起来的对象域。模型论——一门纸台抽象代数和数理逻辑的数学，从实数系 R 出发，用超积方法构造了一个扩大的数系——超实数系 *K ，证明了实无穷小量是 *R 的合法成员。这就在数学认识史上迈出了极其重要的一步，因为 R 中的点没有内部结构，而 *R 中的点则有内部结构。完全证实了一百年前马歇尔的数学

引言：微分与积分中的以直代曲、比求还早。

从物理学史来看，物理学中的时间、空间是通过坐标系来确定的，经典力学用欧氏坐标系来判定坐标系，由此形成了经典力学的数学工具——标准分析。经典力学的微分模型——点模型。经典力学规律的数学表现——决定论的因果律。量子力学深入到基本粒子这个层次。随着对物质结构的认识的深化，物质存在的基本形式，时间与空间必须有新的内容，从而时间、空间的数学概念也必须进一步发展。量子力学的模型——波模型。量子力学规律的数学表现——概率论的因果律。基本粒子的二重性——波与粒。对于这些本质特征，以“尺”为对象域的非标准分析将被证明是一个非常重要的数学工具。

从哲学方面来说，非标准分析是唯物辩证法的又一范例。它是唯物论的。因为自然界为无穷小量提供了原型。自从一九二七年发现第一个基本粒子以来，基本粒子的直径大约在 10^{-12} ~ 10^{-14} 厘米之间。同宏观的物体相比，它们是无穷小量。因此，这些数学并不象某些人所说的，是“自相矛盾的”，是“神秘的”，恰恰相反，自然界对这一切想象的数学都提供了原型。非标准分析是辩证的，因为基本粒子是不可穷尽的，反映基本粒子的数学——无穷小量也是“不可度量的，不可测量的，不可认识的，不可穷尽的”。非标准分析对象域“尺”的基本性质（非阿基米德有序域，每一量子有极其复杂的结构）基本上反映了客观世界在数学方面的本质特征。这就为非标准分析的发展开辟了无限广阔的前途。

林木义（中国社会科学院哲学研究所自然辩证法组）

非标准分析理论的产生是数学发展史上的一件大事，引起了国内外数学工作者的热烈讨论。对这一理论的哲学问题提出

不同的意见，这是不奇怪的。可以通过百家争鸣和科学实践得到解决。对于围绕着非标准分析问题而展开的不尚哲学观点的斗争，我们必用马克思主义的观点进行分析。批判其中的唯心论和形而上学。但是，在目前的讨论中，有的同志在批判鲁彦政用形而上学的观点去解释其数学成果的时候，没有把非标准分析本身和哲学观点区别开来。违背了毛主席关于自然科学本身没有阶级性的教导。说什么“非标准分析是形而上学的数学体系，是唯心主义霸权的产物”。把小孩和洗澡水一起丢掉。还有的同志对马克思主义的观点，没有全面理解。鲁彦政的应用，在看到无限小量与有限量具有相对立的一面的时候，却否认相对之中有绝对。把具有辩证法思想的无限、量说成是形而上学的。所以否定非标准分析。这些做法和观点都是错误的。对我国科学的发展是有害的。

黄细敏（南京大学）

从目前的情况来看，非标准分析是用不同的方法去搞标准分析的结果。这种分析又去发展下去，能够成为一种新的非标准基米德分析。以及这种分析能够用于物理学。这要由实践来决定。对于非标准分析，当它从数学上严格地定义了无限的发展下去，将来一定会会有新的结果。我们寄希望于它的将来。但是，关于运用非标准分析的方法来讲授微积分，这种做法是否方便，对此，我有些怀疑。我赞成把初等微积分下放式中去教。我认为，只要把现有的微积分教材加以适当改进，就可以使得初等微积分的难度程度和广度的代差差不多。这里说的适当改进，简而言之是指运用单值控制函数来处理极限过程的新方法。这种方法我在一九五八年南京大学学报上曾提云过。近年来又进一步完善了这种方法。

楊維洲（北京工業大學）。

非標準分析是用數理邏輯的方法（模型論）來處理分析數學的一種辦法。由於它與幾何有完全固定的 所以能引起對具體的、固化的 ω 以及它的應用進行深入具體的研究 作為一個研究課題。

王克強（北京師範大學）

非標準分析作為一門數學是无可非議的。非標準分析的論證 涉及到形式語言 這也是很自然的。在某種意義上講 特別是在數學研究中 形式語言要比自然語言更精確一些 非標準分析與標準分析是一致的 可以相互配合使用。非標準分析本身也發展了原有的數學分析方法，方法多了，更好些。數學工作者可以考慮用這些方法去做一些工作 至於用非標準分析得出的結論以及非標準模型能召呼于物理的問題 這要進一步研究 最終還由實驗來檢驗。

关于在大学 公年使用非标准分析的办法来讲模数积分学 我认为这是可以实验的 也是一件有意义的工作。但是 这并不是说可以完全不要 $\varepsilon-\delta$ 方法

在适当的时候 还是得讲一下 $\varepsilon-\delta$ 方法。我认为 对于各种非标准模型的深入研究 把它们搞得更清楚一些，是一件重要的工作。

程以生（北京師範大學中學教師）

同意王克強老師的意見。要研究非標準模型本身結構就不完。

李邦端（中國科學院數學研究所）。

~ 10 ~

非标准分析和标准分析是一致的，它继承和发展了标准分析。这两种分析方法是统一的，都是有效的微积分新方法。

在许多情况下，非标准分析的处理过程是十分方便的。例如，应用这种方法来证明柯尔采兹引理就是一例。解一阶微分方程的欧拉折想法，用非标准分析来处理，是非常自然的。

非阿基米德分析 国外很少有人注意。这种分析，扩大了数学研究的领域，值得引起注意。

朱盛通 北京市机械学校，

在学习马恩恩《数学手稿》的过程中，我们开始接触到非标准分析这种新的数学分析方法。我们觉得，新方法可能更接近于《数学手稿》的精神。

我们目前正在编写北京机械工业系统七、二一工人大学用的微积分学教材。在编写过程中，我们打算采用一些非标准分析的基本思想和方法。由于教材都具有一些通用性的，因此，这种做法也会带来一些新问题。但是，我们勇于实践一下，在教学实践中逐步摸索经验。我们希望得到其他兄弟院校的帮助和指导。

杨守唐（北京师范大学）

我们认为，应用非标准分析的无限小来讲授微积分学的基本概念，教之、 $\varepsilon-\delta$ 方法，可能更接近于马恩恩《数学手稿》的精神。另一方面，微积分学在工程技术上的实际应用，都采用无限小的说法。基于这两点认识，我们打算编写一本新的非标准的微积分教材。我们的基本想法是，使这本教材较好地符合《数学手稿》的精神，同时又易于被学生理解，方法也简单方便，具有一定的科学性。

入手，引入几条公理，采用公理化的方法把实数 $\mathbb{R}$ 造出来，用实数各个微积分学的基本概念。

张锦文

今天的座谈会 可谓生动 活泼。在会上发言的有不满三十岁的青年 有从事微积分研究和教学工作四五十年的老科学家 老教授。胡保明教授来京出差 也参加了我们的这个座谈会 并作了很好的发言 对在座的微分逻辑工作是一个很大的鼓励 很大的支持。我们在当前深入研究微学中的逻辑问题，方法问题。王光鈞教授从微学史上从微学研究无限层对微学的重大发展的角度 论述了非标准分析的意义。陈亚华教授从微分逻辑的性质 对象 从形式化方法的科学意义的角度论述了非标准分析所提供的微学方法奥强有力的分析微学工具 此外，沈有鼎教授 黄绍毅教授 王世强教授等也都从不同的角度发表了自己的看法。对于非标准分析作为微学的一个新分支 应当重视它 研究它，我们的座谈会对这些意见是一致的 同时对于教学上的问题的意见是不一致的 这要通过进一步的讨论和教学试验来解决。

原书空白页

标准分析与非标准分析

学习《数学手稿》和《自然辩证法》的体会

林 龙 感

非标准分析与标准分析的根本区别在于把论域从局限于单层次的实数域扩充到多层次的非标准数域。相应的 标准分析使用极限方法 而非标准分析使用无限小推理方法。

极限方法和无限小推理方法是研究数学分析的两钟基本方法 它们相辅相成的 论域和方法要相互适应。目前标准分析与非标准分析的对立只是暂时现象 对立斗争的结果必将把分析推进到一个新的阶段

在如何评价这两种分析的对论中 我们认为必须将其与数学家的错误观念与学科本身的科学论断区别开 爱因斯坦指出：
‘在任何一门科学中 不正确的观念 如果抛开观察错误不计 归根到底都是对于正确事实的不正确的观念 事实终究是事实 尽管关于它的现有观念是错误的’（《自然辩证法》，第139页）。我们对错误观念进行批判与对学科进行评价具有联系又有区别的两种任务 本文的任务主要是属于后一项。

(一) 标准分析

如何评价极限方法是标准分析中一个带根本性的问题 有些同志对极限方法持否定态度 他们虽然误解了马克思恩格斯一段话、为了得到、导数 就必须设 $x = x$ 因而更严格地按数学上的 $x - x = 0$ ，无须任何只是无限趋近之说的糊塗话。’（《数学手稿》，第5页）他们认为，所谓‘予备导数的极限

~ 4 ~

是导数，就是 导数 导数无限趋近于导数，这和马克思所说的 必须设 $x_1 = x$ 相抵触 是马克思所批判的 无限趋近的胡说。其实，这是从表面看问题 没有全面领会马克思所说的精神实质。

关于求导数的全过程 马克思是这样说的：‘我们称这个表达式为 x 的函数微 它的通过取差而得到的最初变形称为 x 的导函数微 它的经过微分过程最终得到的形式称为 x 的导函数微。’（《数学手稿》 第4页） 如果以求切线斜率为例 这就是通过取差而得到割线斜率。当 x_1 无限趋近 x 时，割线斜率无限趋近切线斜率 直至 x_1 到达 x 时，割线转化为切线 割线斜率最终得到的形式就是切线斜率。这个 x_1 变到 x 的过程就是微分过程。在变化的过程中 当然必须 $x_1 \neq x$ 否则它就不是已知的 割线的斜率。只有到变化終了时 x_1 到达 x ，已知的割线斜率才转化为特定的切线斜率，所以 为了得到导数 必须设 $x_1 = x$ ，因而是严格数学意义上的 $x_1 \rightarrow x = 0$

为了求得切线斜率 首先通过取差而得到割线斜率 当 x_1 变到 x 时 割线斜率转化为切线斜率 这种方法就是极限方法 这个过程是一个否定之否定的过程 其中 x_1 变到 x 割线斜率变成切线斜率的过程是微分过程 也就是极限过程 切线斜率就是割线斜率所趋近的极限，所谓取极限是取变化过程的了值 而不是取它的中间值 是取所求的精确值而不是近似值。

上述说明的根据是马克思的《关于切线问题》一文 这篇文章是马克思应恩格斯的请求为说明微分学问题的实质所写的 在这篇基本文献中 马克思明确指出 “设横坐标长为 h （即 PP' ） 通过点 M 引割线 MS h 减少得越多，即 PP'

减小两变量 PS 就趋向于跟密切接近 PP 和 PP' 重合， PP' 趋向于零，因此 RT 就是 PS 所趋向的极限。*（《数学手稿》，第22页）。由此可见，认为马院是否按极限方法的理解是错误的。

值得注意的，是，通常的极限定义不谈如何求极限，不谈如何得到导数，得到切线斜率，而是阐明变量和它的极限的关系，吴说“切线斜率是割线斜率的极限”，这句话是什么意思，既然变化过程最后一个值是特定的，切线斜率，那么作为变化过程中间值的，已知的，割线斜率就没有最后一个值，作为变化过程中间值的，已知的，割线斜率，当然必限 x ，并且极限定义中强调 x ， Δx 以及变化过程没有最后一个值都对变量（它是已知的）加以限制，和马克思强调的“为了得到导数，必须设 x ， Δx ”，异曲同工。正因为当 x 无限趋近于 x 时，导数无限趋近于导数，于是当 x 到达 x 时，导数就转化为导数，而且只有“到达”，才能“转化”，从已知转化为需求，这正好是相辅相成的。

那么马亮亮所批评的“无限趋近之美的糊塗话”是指什么呢？与此有关的，还有马亮亮这一段话：“一些进行逻辑推断的做法跟所坚持的即以自慰的说辞是， $\frac{dy}{dx}$ 在某种意义上只是很小<的比>，仅仅接近于 $\frac{0}{0}$ ，这真奇怪，……”（《做数学题》第3页），“有些顾客看到有“接近”“无限趋近”等字眼就以为其否定极限才疏，进而将其误解

马克思在评述微分方法的先驱者达朗贝尔的微分学时，明确指出：“在实质意义上是正确的。”（《数学手稿》，第25页）。又说：“达朗贝尔脱不了微分学的神秘外衣，取得了很大的进展。”（《数学手稿》，第91页）。他提到达朗贝尔的错误都是属于观念上的错误。达朗贝尔不用无限小，“无限小”