双博士系列

高等学校数学教材配套辅导用书

高等数学

经典习题及详解

（可和同济五版及其他教材配套使用）

主　编　北京大学数学科学学院　韩　松

编　写　双博士数学课题组

总策划　胡东华

机械工业出版社
China machine Press

双博士精品系列

高等数学
经典习题及详解

（可和同济五版及其他教材配套使用）

主　编　北京大学数学科学学院　韩松
编　写　双博士数学课题组
总策划　胡东华

机械工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学经典习题及详解/韩松主编．—北京：机械工业出版社，2003．9

ISBN 7-111-12971-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．韩…　Ⅲ．高等数学-习题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 075749 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮编：100037）

责任编辑：刘　永　　　责任校对：郝峥嵘

封面设计：胡东华　　　责任印制：何全君

北京市高岭印刷厂印刷　　　新华书店北京发行所发行

2003 年 9 月第 1 版　第 1 次印刷

850mm×1168mm　1/32　印张 17.25　字数 392 千字

定价：18.00 元

前　　言

这本《高等数学经典习题及详解》是对大学高等数学课程的补充。本书编写组集多年教学经验，并将多年教学过程中反复使用效果较好的习题（包括近年的考研题）编纂成书，以飨读者。

本书是根据本科非数学专业的教学要求，并参照数学大纲而编写的。每节习题分为选择题、填空题和解答题，以及与每章知识点对应的各年考研真题。在习题答案与提示部分，给出了清晰完整的解题思路和具体的解答过程，有些为一题多解，以拓展读者思路。

本习题集囊括了高等数学方面大纲要求的所有知识点，相信会对读者巩固数学基础，提高解题能力大有裨益。同时，也可作为高校教师和报考硕士研究生的考生的参考书。在编写过程中，总策划胡东华做了大量组织编写及体例策划工作，特此致谢！由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

本书用 60 克特制的防盗版纸印刷，双色排版，印装精美，内容精致.故称之为双博士精品系列.

双博士全体同仁非常感谢考生对双博士品牌的厚爱，并衷心希望广大考生对双博士图书内容和质量的改进提出具体意见，可以发电子邮件(shuangboshi@ sina. com)进行交流指正。

中国教育考试双博士网站 http://www. bbdd. cc，举行考前两个月免费四、六级押题讲座。届时敬请轰炸！（双博士网上押题讲座已进行了三次，好评如潮，详见背面）

双博士数学课题组

2003 年 9 月北京

目录

MU LU

第一章　函数与极限

§1.1　映射与函数

（一）选择题

1. 区间$[a,+\infty)$表示不等式(　　).

　(A)$a<x<+\infty$;　　(B)$a\leqslant x<+\infty$;

　(C)$a<x$;　　(D)$a\geqslant x$.

2. 若$\varphi(t)=t^3+1$,则$\varphi(t^3+1)=$(　　).

　(A)t^3+1;　　(B)t^6+2;

　(C)t^9+2;　　(D)$t^9+3t^6+3t^3+2$.

3. 设$y=f(x)$的定义域是$[-1,1]$,则$y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域是(　　),其中$0\leqslant a\leqslant 1$.

　(A)$[a-1,a+1]$;　　(B)$[-a-1,-a+1]$;

　(C)$[1-a,a-1]$;　　(D)$[a-1,1-a]$.

4. 函数$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是(　　).

　(A)偶函数;　　(B)奇函数;

　(C)非奇非偶函数;　　(D)既是奇函数又是偶函数.

5. 函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形对称于直线(　　).

　(A)$y=0$;　　(B)$x=0$;

　(C)$y=x$;　　(D)$y=-x$.

6. 若$f(x)$为奇函数,$\varphi(x)$为偶函数,且$\varphi(f(x))$有意义,则$\varphi(f(x))$是(　　).

　(A)偶函数;　　(B)奇函数;

　(C)非奇非偶函数;　　(D)可能是奇函数也可能是偶函数.

7. 函数$y=10^{x-1}-2$的反函数是(　　).

　(A)$y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{x-2}$;　　(B)$y=\log_x 2$;

　(C)$y=\log_2\dfrac{1}{x}$;　　(D)$y=1+\lg(x+2)$.

8. 在区间$(-1,0)$上由(　　)给出的函数是单调增加的.

　(A)$y=|x|+1$;　　(B)$y=5x-2$;

　(C)$y=-4x+3$;　　(D)$y=|x|-2x$.

9. 函数$y=|\sin x|+|\cos x|$是周期函数,它的最小正周期是(　　).

(A) 2π;　　(B) π;

(C) $\frac{\pi}{2}$;　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

10. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在同一坐标系中的图像是(　　).

(A)完全不同的;　　(B)部分相同,部分不同;

(C)完全相同的;　　(D)可能相同,也可能不同.

(二)填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x<3\end{cases}$

则 $f(x)$ 的定义域是________, $f(0)=$________, $f(1)$________.

2. $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ 的定义域是________,值域是________.

3. 设 $f(x)=x-x^3$,若 $f(x)=0$,则 $x=$____________;若 $f(x)>0$,则 $x\in$________;若 $f(x)<0$,则 $x\in$________.

4. 设 $f(x)=ax+b$,则 $\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$________.

5. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$,若 $f(x)+f(y)=f(z)$,则 $z=$________.

6. 若 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,则 $f[f(x)]=$________, $f\{f[f(x)]\}=$________.

7. 若 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+3$,则 $f(x)=$________.

8. 若 $z=x+y+f(x-y)$,且知当 $y=0$ 时, $z=x^2$,则 $f(x)=$________.

9. 设 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$,则 $f(x)=$________.

10. 若 $\varphi(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ -x, & x>0\end{cases}$,而 $f(x)=\sqrt{\varphi^2(x)}$,则 $\varphi[f(x)]=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_.\\ \_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$

(三)解答题

1. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　　(2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　　(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

2. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明 $f(t)=f(\frac{1}{t})$.

3. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\lg x, (0, +\infty)$; (2) $y=\sin x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$; (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$, 当 a,b,c,d 满足什么条件时, 反函数与直接函数相同?

5. 对于函数 $f(x)=x^2$, 如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ, 就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值都在邻域 $U(0,2)$ 内?

6. 设 $G(x)=\ln x$, 证明: 当 $x>0, y>0$, 下列等式成立:

(1) $G(x)+G(y)=G(xy)$;

(2) $G(x)-G(y)=G(\frac{x}{y})$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 问 (1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$; (3) $f(x+a)$, $(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域各是什么?

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=e^x$. 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图像.

9. 设 $f(x)$ 符合 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ (a、b、c 均为常数) 且 $|a|\neq|b|$, 试证: $f(-x)=-f(x)$.

10. 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)\neq 0$, $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, 试求: $f(1985)$.

11. 试证: 若对于函数 $f(x)$, $(-\infty<x<+\infty)$ 有等式 $f(x+T)=Kf(x)$ (式中 K、T 为正常数), 且 $f(x)=a^x\varphi(x)$ (式中 a 为常数), 则 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数.

12. 求函数 $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

13. 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)$ 都为单调增加函数, 试证:

若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$, 则有 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

§1.2 数列的极限

(一) 选择题

1. 若数列 $\{x_n\}$ 有极限 a, 则在 a 的 ε 邻域之外, 数列中的点(　　).

(A) 必不存在; (B) 至多只有有限多个;

(C)必定有无穷多个；　　　　(D)可以有有限个，也可以有无限多个．

2. 若数列$\{x_n\}$在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$邻域内有无穷多个数列的点，则(　　)．(其中$\varepsilon$为某一取定的正数)

(A)数列$\{x_n\}$必有极限，但不一定等于a；

(B)数列$\{x_n\}$极限存在且一定等于a；

(C)数列$\{x_n\}$的极限不一定存在；

(D)数列$\{x_n\}$一定不存在极限．

3. 数列$0,\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\cdots$(　　)．

(A)以0为极限；　　　　(B)以1为极限；

(C)以$\frac{n-2}{n}$为极限；　　　　(D)不存在极限．

(二)填空题

1. 设数列$\{x_n\}$的通项公式是$x_n=\frac{2n-1}{5n+2}$，对于预先任意给定的正数ε，若$|x_n-\frac{2}{5}|<\varepsilon$，那么$n$应从________开始．

(三)解答题

1. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

2. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，并举例说明反过来未必成立．

3. 设数列x_n有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

§1.3　函数的极限

(一)选择题

1. 极限定义中ε与δ的关系是(　　)．

(A)先给定ε后惟一确定δ；　(B)先确定ε后确定δ，但δ的值不惟一；

(C)先确定δ后给定ε；　　　(D)ε与δ无关．

2. 任意给定$M>0$，总存在着$X>0$，当$x<-X$时，$f(x)<-M$，则(　　)．

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$；　　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$；

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$；　　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.

3. 若函数$f(x)$在某点x_0极限存在，则(　　)．

(A)$f(x)$在x_0的函数值必存在且等于极限值；

(B)$f(x)$在x_0的函数值必存在，但不一定等于极限值；

(C)$f(x)$在x_0的函数值可以不存在；

(D)如果$f(x_0)$存在的话必等于极限值．

4. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则(　　).

(A)$f(x)$必在x_0的某一邻域内有界;

(B)$f(x)$在x_0的某一邻域内一定无界;

(C)$f(x)$在x_0的任一邻域内一定有界;

(D)$f(x)$在x_0的任一邻域内一定无界.

5. 如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在,则(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且$\lim\limits_{x\to x_0}=f(x_0)$;

(B)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在但不一定有$\lim\limits_{x\to x_0}=f(x_0)$;

(C)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不一定存在;

(D)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$一定不存在.

(二)解答题

1. 根据函数极限的定义证明:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$

2. 求当$x\to0$时$f(x)=\dfrac{x}{x},\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$的左、右极限,并说明它们在$x\to0$时的极限是否存在.

§1.4　无穷小与无穷大

(一)选择题

1. 无穷小量是(　　).

(A)比零稍大一点的一个数;　(B)一个很小很小的数;

(C)以零为极限的一个变量;　(D)数零.

2. 无穷大量与有界量的关系是(　　).

(A)无穷大量可能是有界量;　(B)无穷大量一定不是有界量;

(C)有界量可能是无穷大量;　(D)不是有界量就一定是无穷大量.

3. 指出下列函数中当$x\to0^+$时(　　)为无穷大.

(A)$2^{-x}-1$;　　(B)$\dfrac{\sin x}{1+\sec x}$;

(C)e^{-x};　　(D)$e^{\frac{1}{x}}$.

§1.5　极限运算法则

(一)选择题

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则(　　).

(A)当$g(x)$为任意函数时,有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$成立;

(B)仅当$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$时,才有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$成立;

(C)当$g(x)$为有界时,有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$成立;

(D)仅当$g(x)$为常数时,才能使$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$成立.

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则下列极限一定存在的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^a$($a$为实数);　(B)$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$;

(C)$\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$;　(D)$\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$.

3. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在,则(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$一定都不存在;

(B)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$一定都存在;

(C)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$中恰有一个存在,而另一个不存在;

(D)$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$及$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$有可能都存在.

(二)填空题

1. 设数列$x_n=(-1)^{n+1}$的前n项和为S_n,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=$________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})\sqrt{n-1}=$________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=$________.

4. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2+bn+5}{3n-2}=2$,则$a=$________;$b=$________.

(三)解答题

1. 设$x_n=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设$x_n=\dfrac{1^3}{n^4}+\dfrac{2^3}{n^4}+\dfrac{3^3}{n^4}+\cdots+\dfrac{n^3}{n^4}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2})$；

(7) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$.

§1.6　极限存在准则　两个重要极限

(一)选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})=(\quad)$.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$；

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\infty$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)n}{2}/n^2=\dfrac{1}{2}$；

(D)极限不存在.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$的值为(　　).

(A) 1；　　(B) ∞；

(C)不存在；　　(D) 0.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=(\quad)$.

(A) ∞；　　(B)不存在；

(C) 1；　　(D) 0.

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(1-x)}{(x-1)^2(x+2)}=(\quad)$.

(A) 1/3；　　(B) −1/3；

(C) 0；　　(D) 2/3.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{2x}=(\quad)$.

(A) e^{-2}；　　(B) ∞；

(C)0;　　　　　　　　(D)$\frac{1}{2}$.

6. 无穷多个无穷小量之和(　　).

(A)必是无穷小量;　　　　(B)必是无穷大量;

(C)必是有界量;

(D)是无穷小,或是无穷大,或有可能是有界量.

(二)填空题

1. 要使 $\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)^{1/x}=0$,则 b 应满足________.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$________.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=$________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(ax+b)^{1/x}\quad(a>0,b>0,x>0)=$________.

(三)解答题

1. 计算下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$;　　　　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$($x$ 为不等于 0 的常数);

(4)$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;　　　　(5)$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{2x}$;

(6)$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^{kx}$($k$ 为正整数).

2. 利用极限存在准则证明:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi})=1$;

(2)数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$的极限存在.

§1.7　无穷小的比较

(一)选择题

1. 两个无穷小量 α 与 β 之积 $\alpha\beta$ 仍是无穷小量,且与 α 或 β 相比(　　).

(A)是高阶无穷小;　　　　(B)是同阶无穷小;

(C)可能是高阶无穷小,也可能是同阶无穷小;

(D)与阶数较高的那个同阶.

2. 试决定当 $x\to 0$ 时下列哪一个无穷小是对于 x 的三阶无穷小(　　).

(A)$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$;　　　　(B)$\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$($a>0$ 是常数);

(C) $x^3+0.0001x^2$;　　　　(D) $\sqrt[3]{\tan x}$.

(二) 填空题

1. 如果 $x \to 0$ 时，要无穷小量 $(1-\cos x)$ 与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$ 等价，a 应等于________.

(三) 解答题

1. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{\sin x^m}$ (n,m 为正整数)；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

§1.8　函数的连续性与间断点

(一) 选择题

1. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，又 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x \to 0$ 时(　　).

(A) Δy 只可能是比 Δx 高阶的无穷小量；

(B) Δy 与 Δx 是同阶无穷小量；

(C) Δy 只可能是比 Δx 低阶的无穷小量；

(D) Δy 是无穷小量，但与 Δx 相比是高阶、低阶、甚至于同阶都不一定.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且存在 $\delta>0$ 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 有 $f(x)>0$，则必有(　　).

(A) $f(x_0)>0$;　　　　(B) $f(x_0)\geqslant 0$;

(C) $f(x_0)\neq 0$;　　　　(D) $f(x_0)=0$.

3. $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$，则它的连续区间为(　　).

(A) $|x|>1$;　　　　(B) $|x|>\sqrt{2}$;

(C) $[-\sqrt{e+1},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{e+1}]$;

(D) $(-\sqrt{e+1},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{e+1})$.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$，则它的连续区间是(　　).

(A) $(-\infty,+\infty)$;　　　　(B) $x\neq\dfrac{1}{n}$ (n 为正整数)处；

(C) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;　(D) $x\neq 0$ 及 $x\neq\dfrac{1}{n}$ 处.

5. 设$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$,要使$f(x)$在$x=0$处连续,则$a=$(　　).

(A)2;　　(B)1;

(C)0;　　(D)-1.

6. 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{3}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 若使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是连续函数,则$a=$(　　).

(A)0;　　(B)1;

(C)$\dfrac{1}{3}$;　　(D)3.

7. 点$x=1$是函数$f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ 3-x, & x>1 \end{cases}$ 的(　　).

(A)连续点;　　(B)第一类非可去间断点;

(C)可去间断点;　　(D)第二类间断点.

(二)填空题

1. 设$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\geqslant 0 \\ (a+b)x^2+x, & x<0 \end{cases}$ $(a+b)\neq 0$.

则$f(x)$处处连续的充要条件是$b=$________.

2. $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$, 则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________;若$f(x)$无间断点,则$a=$________.

3. 若$f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & -\infty<x<0 \\ 3x, & 0<x<1 \\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & 1\leqslant x<+\infty \end{cases}$ 在$x=1$处连续则$a=$________.

(三)解答题

1. 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义使它连续:

(1)$y=\dfrac{x}{\tan x}$,$x=k\pi$,$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$);

(2)$y=\cos^2\dfrac{1}{x}$,$x=0$.

2. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

§1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性

(一)选择题

1. 函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n+(2x)^{2n}}(x\geqslant 0)$,则此函数(　　).

(A)没有间断点;　　　　(B)有一个第一类间断点;

(C)有两个以上第一类间断点;

(D)有两个以上间断点,但类型不确定.

2. 方程$x^4-x-1=0$至少有一个根的区间是(　　).

(A)$(0,\dfrac{1}{2})$;　　　　(B)$(\dfrac{1}{2},1)$;

(C)$(2,3)$;　　　　(D)$(1,2)$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 则$x=0$是$f(x)$的(　　).

(A)可去间断点;　　　　(B)无穷间断点;

(C)连续点;　　　　(D)跳跃间断点.

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$, 如果$f(x)$在$x=0$处连续,那么$k=$(　　).

(A)0;　　　　(B)2;

(C)$\dfrac{1}{2}$;　　　　(D)1.

(二)填空题

1. 函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x}, & x\neq -1\\ A, & x=-1\end{cases}$ 当$A=$________时,函数$f(x)$连续.

2. 若$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\sin x$,复合函数$f[g(x)]$的连续区间是________.

3. 设$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$有有限极限值$L$,则$a=$________;$L=$________.

4. 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$,则$a=$________;$b=$________.

5. 设$f(x)=\sin x$,$g(x)=\begin{cases}x-\pi & x\leqslant 0\\ x+\pi & x>0\end{cases}$, 则$f[g(x)]=$________;其连续区间为

______.

(三)解答题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

5. 求下列函数的间断点,并判别间断点的类型:

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$.

6. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数,试确定 a、b.

§1.10 闭区间上连续函数的性质

(一)解答题

1. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $g(0)=0$,以及 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$,试证:$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 设$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$,且$f(x)$在 $x=0$ 处连续,试证 $f(x)$ 在所有的点 a 处连续.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$,其中 $a>0,b>0$,至少有一个正根,并且它不超过 $a+b$.

4. 设$f(x)$在闭区间$[0,2a]$上连续,且$f(0)=f(2a)$,则在$[0,a]$上至少存在一点 x,使$f(x)=f(x+a)$.

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $a<c<d<b$. 求证:在$[a,b]$上必存在点 ε,使 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\varepsilon)$.

6. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,则在$[x_1,x_n]$上必有 ε,使