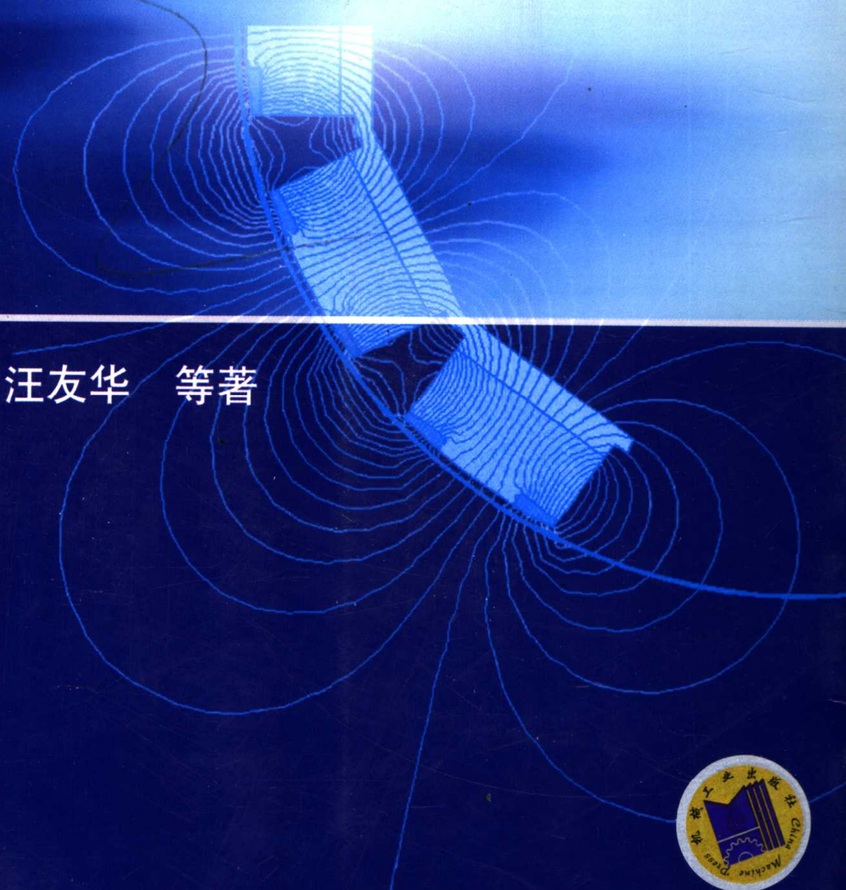
电气工程电磁场数值分析



● 颜威利　杨庆新　汪友华　等著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

电气工程电磁场数值分析

颜威利　杨庆新　汪友华　刘福贵
杨晓光　李　颖　刘素贞
著

机 械 工 业 出 版 社

本书总结了作者及其学术团队20余年对电气工程电磁场数值分析的主要科学研究和研究生教学成果，内容丰富，层次分明、系统性强。本书以数值分析方法中应用最普遍、最有效的有限元法为基础，具体论述了二维电磁场、三维静电场、三维静磁场、永磁磁场、三维涡流场和温度场的有限元分析，以及无单元法、磁场力、电磁机构动态特性、电磁场逆问题的数值求解和全局优化设计，展示了当代国际电磁场计算领域中的热点问题。书中还包括较多的计算实例。

本书可作为电气工程类专业博士生和硕士生的教材，也可作为相关专业本科学生和科技人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

电气工程电子磁场数值分析/颜威利等著．—北京：机械工业出版社，2005.8

ISBN 7-111-17238-8

Ⅰ．电…　Ⅱ．颜…　Ⅲ．电气工程－电磁场－数值计算　Ⅳ．TM153

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第095046号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：于苏华
责任编辑：于苏华　版式设计：冉晓华　责任校对：姚培新
封面设计：张　静　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷
2005年9月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·17.75印张·437千字
定价：30.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
封面无防伪标均为盗版

前　言

电磁场数值分析经过近30年的发展，已经成为电气工程领域一个新的学科分支，电气工程设计、计算、特性分析等许多问题需要应用电磁场数值分析技术。我国高校电气工程类专业自20世纪80年代初期即为硕士和博士研究生开设电磁场数值分析课程，为此需要有特色的研究生课程教材，科研和工程技术人员也需要能反映当代电磁场数值分析学术水平的专著。本书就是在这样的背景下应运而生的。

著者颜威利、杨庆新、汪友华等人组成的电磁场数值分析课题组1977年即开始进行该领域的研究工作，1983年编写了电器电磁场数值分析研究生教材。在国家自然科学基金、科技部、教育部和河北省及天津市自然科学基金的大力支持下，课题组20余年来取得了丰硕的研究成果，先后获国家科技进步奖一项、河北省科学技术突出贡献奖一项和省部级科技进步一、二等奖7项，发表论文180余篇，其中在IEEE期刊上发表25篇。目前，由颜威利、杨庆新和汪友华领导的拥有50多名博士（后）、博士研究生和硕士研究生等组成的学术团队高水平成果不断涌现。著者所在实验室2003年被科技部批准为电磁场与电器可靠性省部共建国家重点实验室培育基地。颜威利教授和杨庆新教授先后担任国际电磁场计算学会（International COMPUMAG Society）理事。

本书总结了著者领导的电磁场学科研究群体20余年来对电磁场数值分析的科学研究成果和博士、硕士研究生教学经验。内容丰富，结构合理，系统性强，层次分明，力求讲深讲透。关于非线性问题、动态分析、磁场力和耦合问题、磁损耗及分离技术等都是同类书中少有的，而逆问题、无单元法、横向磁通感应加热等则是当前研究的热点问题。总之，该书反映了当代电磁场数值分析的学术研究水平，是一本科学技术专著。本书含有许多电气工程计算实例，实用性强，适合用作电气工程类专业博士生、硕士生以及本科生的电磁场数值分析课程教材，也可作为科研及工程技术人员参考用书。

全书重点突出，以电气工程中应用最普遍、最有效的有限元法为重点，以非线性电磁场为主要对象，全面论述静电场、静磁场、永磁场、涡流场和温度场的工程数值计算方法。关于磁场作用力、动态特性和电磁场逆问题和优化设计的论述有明显的工程特性。

著者感谢为本书内容做出贡献的所有课题组成员以及参加本书文稿整理、打印工作的研究生们。

在本书撰写过程中，参阅了许多相关文献资料并利用了一些图表曲线，在

此向它们的作者和有关单位表示感谢。

衷心感谢国家自然科学基金委员会、科技部、教育部和河北省及天津市自然科学基金委员会的大力支持。

本书的出版得到了河北省教育厅科学技术出版基金的资助，在此深表谢意。

由于著者水平所限，缺点、错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

著 者

2005 年 8 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　绪　　论

1856年麦克斯韦从数学的推演出发，以微分方程和积分方程的形式描述了电场和磁场间的相互关系，得到了举世闻名的麦克斯韦方程组。百余年来，人们以此为基础，从事着电磁场理论分析与工程设计。

电气工程中实际的电磁场问题是相当复杂的，如边界形状不规则、复杂的物质结构、材料性能的非线性以及电磁场量的分布性，以致在计算机出现以前，人们在实际的设计计算工作中，只能采用一些简化措施，得出近似的解析解，或者用模拟试验的方法来求得满足工程要求的近似结果。在相当长的时间内，实际应用当中把场的问题简化成路的问题进行处理是设计电工产品的主导方法，当然设计和计算精度是很差的。

随着电机和电器工业的发展，电机和变压器的单机容量越来越大，常常没有现成的设计和运行经验可以借鉴，开关电器的电磁系统和触头灭弧系统也难以用路的方法来描述。由于近代物理学的发展，许多高精度的粒子加速器磁铁、波导管和谐振腔等，不仅要赋予带电粒子以能量，而且要有特殊的场型去控制带电粒子的轨迹。对于这些科研、生产中必须用场的观点来进行定量研究的对象和问题，传统的路的计算方法已显得无能为力。

电子计算机的出现，给解算复杂的电气工程技术问题提供了强有力的工具。由于数字电子计算机具有运算速度快、存储容量大、计算功能强和准确度高等优点，使计算技术领域产生了惊人的发展，促进了数值分析在科学技术中的广泛应用。20世纪60年代，国际上已有人开始将电子计算机数值分析技术应用于电气工程中场的计算。初期的方法是采用有限差分法离散来求解二维非线性的磁场问题。

1970年，P.P.Silvester和M.V.K.Chari把有限元法引入到电磁场计算中[1]。有限元法以变分原理为基础，用剖分插值的方法建立各自由度间的相互关系，把二次泛函的极值问题转化为一组多元代数方程组来求解。它能使复杂结构、复杂边界和非线性介质情况的边值问题得到解答。由于数值处理技术的提高，例如采用不完全Cholesky分解法，采用自适应网格剖分等方法，使得有限元法在电磁场数值分析的领域中越来越占有主导地位。1976年，在英国牛津召开了第一届国际电磁场计算会议（COMPUMAG），标志着电磁场数值分析已成为电气工程中一个新兴的学科。

1977年，随着我国电器工业现代化的发展，迫切需要对电磁电器产品进行更新换代。颜威利、邱祖述等人合作采用现代电磁场数值分析技术对新一代CJ20系列小容量交流接触器的磁系统进行设计和计算。1978年发表了“用有限元素法计算电磁机构的吸力特性”一文[2]，对二维磁场有限元法和电磁机构的磁场和电磁吸力计算方法作了阐述。

变分原理是有限元法的基础，它将电磁场微分方程的边值问题转化为等价的能量泛函的极值问题。电气工程中能量泛函有着明确的物理含义，它代表了电磁系统的总位能。在稳态电磁场的情况下，电磁系统的总位能应为最小[3]。数值分析方法的关键是离散。形成有限元方程的离散方法可以采用变分方法，也可以采用加权余量法。加权余量法不必写出泛函公式，直接由加权余量积分公式离散，因而较简便，尤其是对电磁场矢量位微分方程，用矢量

加权余量法离散更为方便。

电磁场数值计算程序的开发和完善，在一定范围内实现通用化，是国内外研究的一个发展趋势。电磁场的计算亦随之从手工方法向大规模批量计算发展。通用软件通常由三部分组成：第一部分是前处理，包括数据定义和网格自动生成等；第二部分是数值计算，包括系数矩阵形成，代数方程组的求解和非线性迭代等；第三部分是后处理，包括计算结果输出，力线或位线的图形显示，磁感应强度分布显示以及电磁力的特性计算与显示。对于工程问题来说，电磁电器的特性计算，包括静态吸力特性和动态特性计算，尤为重要。国内较早编制的电磁场分析软件包有 FEMA2D 和 DE2D[4~5]。

20 世纪 70 年代，C.W.Trowbridge 等人提出求解电磁场积分方程的基本思想，并给出了二维、三维问题的离散形式。由于积分方程法的离散仅需在源区进行，所以能较好地解决开域问题及连续计算场的问题。但积分方程法的耦合系数带有超越函数的多重积分，要消耗大量的 CPU 时间。1978 年 C.W.Trowbridge 和 J.Simkin 等人提出了双标量位法[6]，亦称为积分-微分方程法，既可避免采用矢量位使待求未知数增加，又可节省 CPU 时间。1988 年樊明武、颜威利编著的《电磁场积分方程法》对积分方程法和积分-微分方程法的原理、离散方法和程序作了阐述[7]。

1991 年在意大利索伦托召开的第八届国际电磁场计算会议（COMPUMAG）提出了三个鼓励的研究问题：耦合问题（Coupled Problem）、逆问题（Inverse problem）和并行计算，代表了 20 世纪 90 年代电磁场数值分析研究的前沿课题。

电磁场与其他物理场，如力场和热场，相互作用的耦合问题是非常重要的电气工程实际问题，大多数电机和电器的动作都牵涉到电磁能与机械能的转换。电磁机构动态特性计算可以采用参数耦合和方程耦合两种方法。参数耦合方法是采用有限元法计算电磁铁的参数（力、能量、磁链、电感等），用状态方程法来求解电磁机构的动态特性[8]。方程耦合方法则将电磁场微分方程与运动微分方程直接耦合求解，尤其适用于电压源激励的电磁系统[9]。

电机、电器和变压器系统中的焦耳损耗和铁心中的磁滞和涡流损耗最终转化为热能，使产品温度升高，电工产品的温升制约了产品的性能和质量，因此温度场计算是电工产品设计中的重要部分。稳态温度场的有限元求解方法与电磁场类似。涡流场的损耗计算中很重要的内容是磁滞损耗和涡流损耗的分离[10]。电磁感应涡流在工业中可以应用来加热物体，交变电磁场和温度场的耦合分析是感应加热技术的关键。

电磁场的正问题是在已知几何参数与介质参数的情况下，由源求场。而电磁场的逆问题则是由场反求源、或几何参数或介质参数。电磁场正问题有确定解，而电磁场逆问题的解是不确定的，因此，电磁场逆问题的解必须选优。在工程上电磁场逆问题实际上就是优化设计问题。自适应模拟退火法[11]、均场模拟退火法、遗传进化法和小波神经网络法等优化方法在电工产品的设计、计算中得到广泛应用。

有限元法因对求解电气工程中复杂边界、复杂结构和非线性介质情况特别有效而得到发展，至今在电磁场数值计算中仍占主导地位。各种成熟的软件包已经商品化，应用起来很方便。在某些特殊场合，如小气隙和薄膜介质，有限元网格剖分困难，计算精度难以保证。无单元法不需要单元剖分，而靠最小二乘函数或小波伽辽金函数等直接将场离散。无单元法可作为有限元法有力的补充[12]。

交叉学科的研究推动了现代科学技术的发展，电气工程学科与材料学科和生物医学工程

学科的交叉研究给予电磁场数值分析新的内容。电工产品的更新依赖于新材料的应用，新的磁性材料如磁致伸缩材料、磁性薄膜和纳米磁性材料的电磁特性与电磁场数值分析紧密相关[13]。近年来，生物医学电磁技术蓬勃发展，脑电脑磁问题、心电心磁问题、生物医学成像和电磁生物效应等研究都建立在生物电磁场的基础上[14]。一门新的学科——生物医学电磁学正在逐渐形成。新兴、交叉学科发展给电磁场数值分析提出新的要求，电磁场数值分析在电气工程和相关学科中的应用方兴未艾，其发展前景是很广阔的。

参考文献

1 Silvester P P, Chari M V K. Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problem. IEEE Trans. on PAS, 1970, 89 (7)

2 颜威利，张云峰，邱祖述．用有限元素法计算电磁机构的吸力特性．低压电器技术情报，1978 (4)：1~12

3 颜威利．三维恒定非线性磁场有限元法的变分原理．哈尔滨电工学院学报，1983 (1)：11~21

4 Fan Mingwu, Miao Yixin, Yan Weili. DE2D Interactive Software Package for 2D Magnetostatic Electrostatic and Eddy Current Field Computations. IEEE Trans. on Magnetics, 1985, 21 (6): 2539~2542

5 Yan Weili, Yang Qingxin, Li Zhigang. Finite Element Analysis for Static and Dynamic Characteristics of Electromagnets. IEEE Trans. on Magnetics, 1988, 24 (1): 282~285

6 Armstrong A G, Simkin J, Trowbridge C W. The Solution of 3D Magnetostatic Problems Using Scalar Potentials. RL-778-088, 1978

7 樊明武，颜威利编著．电磁场积分方程法．第1版．北京：机械工业出版社，1988

8 颜威利，张乃宽，崔文才．交流真空接触器直流激磁方案的动态分析．低压电器，1984 (6)：5~9

9 Yan Weili, Li Lin, Yang Qingxin. Numerical Calculation of the Non-Linear Dynamic Process in Electromagnetic Devices. IEEE Trans. on Magnetics, 1992, 28 (2): 1252~1254

10 杨庆新．工程涡流损耗和磁滞损耗的分析计算及磁损耗分离技术研究：[博士学位论文]．天津：河北工业大学，1997

11 汪友华．真空组合电器三维静电场逆问题的数值分析：[博士学位论文]．福州：福州大学，1994

12 刘素贞，杨庆新，陈海燕．无单元法在电磁场数值计算中的应用研究．电工技术学报，2001，16 (2)：30~33

13 Yan Rongge, Yang Qingxin. A Numerical Calculation Model for Giant Magnetostrictive Devices. Proceedings of 15th International Conference on Magnet Technology. Beijing: Science Press, 1997, 1380~1383

14 Rao Liyun, He Renjie, Yan Weili. Computations of Electroencephalography and Magnetoencephalography of Real Head Model. IEEE Trans. on Magnetics, 2000, 36 (4): 1812~1816

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第二章　电气工程中电磁场的基本方程

第一节　电磁场的基本方程组

电和磁现象是一个不可分割的统一体。电磁场的内在规律由电磁场基本方程组——麦克斯韦（Maxwell）方程组表达。这些方程是由麦克斯韦对大量实验结果及基本概念进行了数学加工和推广归纳而成的。麦克斯韦方程组是分析和计算电磁场问题的出发点，它既可写成微分形式，又可写成积分形式。

一、微分形式

微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{2-4}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为电场强度（V/m）；$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度（T）；$\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量（C/m^2）；$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度（A/m）；$\boldsymbol{J}$ 为电流密度（A/m^2）；ρ 为电荷密度（C/m^3）。

通常可将式（2-1）称为麦克斯韦第一方程，将式（2-2）称为麦克斯韦第二方程。在麦克斯韦方程组中，有关场量之间的关系可表示为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{2-5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2-6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{2-7}$$

式中，ε 为介电常数（电容率）；μ 为磁导率；σ 为电导率。对于各向异性媒质，这些参数是张量；对于各向同性媒质，它们是标量。只有在线性且各向同性媒质的情况下，才是常数。在 SI 单位制中，对应于自由空间的介电常数 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$F/m，磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m。

有了麦克斯韦方程组和场量之间的关系表达式，就可以确定场量的分布。但在进行电磁场问题分析的工程实际中，却很少直接应用麦克斯韦方程求解。这是由于多变量的微分方程组较难处理，因此人们经常将麦克斯韦方程组表示为简化场变量的微分方程。为了有效减少待求的自由度数，提高计算效率，同时也为了简化概念，更简便地构造数学模型，在工程实际中通常引入各种位函数来描述场。对于无旋场通常引入标量位函数，而对于有旋场则引入矢量位函数，对于复杂介质结构和交变情况，往往采用不同位函数相结合。

二、积分形式

利用高斯定理和斯托克斯定理，可以由麦克斯韦方程组的微分形式导出积分形式的等价方程组，如下：

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = i = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2-8}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2-9}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2-10}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2-11}$$

第二节　稳态标量位方程

一、静电场泊松方程

由电量不随时间变化的静止电荷产生的电场称为静电场。对于静电场，由麦克斯韦方程可知，电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的旋度为零，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2-12}$$

上式表明，静电场中电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的旋度处处为零，因此，静电场是一个无旋场。根据矢量分析恒等式，任意一个标量函数的梯度的旋度恒等于零，则一定存在标量电位函数 φ 满足

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi \tag{2-13}$$

由电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的关系 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，式（2-4）可写为

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi = -\rho \tag{2-14}$$

式（2-14）即为静电场的基本方程，它是一个泊松方程（Poisson′s equation）。

对于直角坐标系，静电场泊松方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\rho \tag{2-15}$$

对于二维平面场（$x-y$ 平面），则为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\rho \tag{2-16}$$

在场域中无电荷分布（$\rho = 0$）处，有 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$，此时静电场的基本方程为

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi = 0 \tag{2-17}$$

这就是静电场的拉普拉斯方程（Laplacian equation）。可见，拉普拉斯方程是泊松方程的特例。

对于直角坐标系，静电场拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \tag{2-18}$$

对于二维平面场（$x-y$ 平面），则为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0 \tag{2-19}$$

另一方面，对于均匀介质，与静电场泊松方程的微分形式相对应的积分形式为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\frac{\rho}{R}\mathrm{d}\Omega \tag{2-20}$$

式中，ρ（x，y，z）为电荷密度的分布函数；R 为从场点到源点的距离，并设无穷远处电位为零。

由 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，电场强度的积分形式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\rho\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{2-21}$$

式中，$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 的方向从源点指向场点。

二、稳态电流场泊松方程

由稳态电流产生的电场为稳态电场。稳态电流场的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \tag{2-22}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{2-23}$$

对式（2-22）两端求散度，并利用矢量分析恒等式，任何一个矢量的旋度的散度恒等于零，有

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{2-24}$$

在有电流源的区域，全电流可表示为源电流与传导电流之和，即

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_p+\sigma\boldsymbol{E} \tag{2-25}$$

式中，$\boldsymbol{J}$ 是全电流密度；$\boldsymbol{J}_p$ 是源电流密度；$\sigma\boldsymbol{E}$ 是传导电流密度。

因而，有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_p+\sigma\boldsymbol{E})=\nabla\cdot\boldsymbol{J}_p+\nabla\cdot\sigma\boldsymbol{E}=0 \tag{2-26}$$

由式（2-23），可引入标量电位 φ，满足 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_p-\nabla\cdot\sigma\nabla\varphi=0 \tag{2-27}$$

即

$$\nabla\cdot\sigma\nabla\varphi=\nabla\cdot\boldsymbol{J}_p \tag{2-28}$$

式（2-28）即为稳态电流场的泊松方程。

如果求解的区域无电流源，此时 $\boldsymbol{J}_p=0$，则电位函数的方程变为

$$\nabla\cdot\sigma\nabla\varphi=0 \tag{2-29}$$

式（2-29）为一拉普拉斯方程。实际中，产生该电流场的源电流密度往往需要借助边界条件来引入。

三、稳态标量位磁场的泊松方程

由稳态电流产生的磁场为稳态磁场。稳态磁场的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \tag{2-30}$$

当磁场区域内没有电流存在，即 $\boldsymbol{J}=0$ 时，则

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0 \tag{2-31}$$

该区域为一无旋场。根据矢量分析恒等式，则一定存在标量磁位函数 ψ 满足

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\psi \tag{2-32}$$

式中，ψ 称为全标量位。

由磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的关系 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，式（2-3）可写成

$$\nabla\cdot\mu\nabla\psi=0 \tag{2-33}$$

当磁场区域存在铁磁性物质时，上式为非线性拉普拉斯方程，它描述了稳态磁场中不存在电流区域的情况。

对于直角坐标系，稳态磁场的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0 \tag{2-34}$$

对于二维平面场（x-y 平面）则为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0 \tag{2-35}$$

当场域中包括有电流的区域时，可以认为空间任何一点的实际磁场是电流源部分所产生的磁场 $\boldsymbol{H}_s$ 和物质被磁化所产生的磁场 $\boldsymbol{H}_m$ 两部分的叠加，即磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 可分为两部分

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_s+\boldsymbol{H}_m \tag{2-36}$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 是空间任一点的磁场强度；$\boldsymbol{H}_s$ 为由宏观传导电流在真空介质中产生的磁场强度；$\boldsymbol{H}_m$ 为由于铁磁物质被磁化由分子电流磁矩产生的磁场强度。

对于由电流密度 $\boldsymbol{J}$ 产生的磁场强度 $\boldsymbol{H}_s$，有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_s=\boldsymbol{J} \tag{2-37}$$

所以，磁化产生的场强 $\boldsymbol{H}_m$ 的旋度为 0，即

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_m=0 \tag{2-38}$$

则 $\boldsymbol{H}_m$ 为一无旋场。因此，根据矢量分析恒等式，则一定存在标量磁位函数 φ_m，满足

$$\boldsymbol{H}_m=-\nabla\varphi_m \tag{2-39}$$

这里的标量位 φ_m 部分描述了磁场的性质，它的负梯度表征了磁化部分的场强，称为简化（部分）标量位。

由 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，以及 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu(\boldsymbol{H}_s+\boldsymbol{H}_m)$，式（2-3）可写成

$$\nabla\cdot\mu\boldsymbol{H}_s-\nabla\cdot\mu\nabla\varphi_m=0 \tag{2-40}$$

写成泊松方程形式为

$$\nabla\cdot\mu\nabla\varphi_m=\nabla\cdot\mu\boldsymbol{H}_s \tag{2-41}$$

上式即为简化标量位的微分方程。

对稳态磁场 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_s+\boldsymbol{H}_m$，由电流产生的场强 $\boldsymbol{H}_s$ 可用积分方法，即比奥-萨伐定律求得。若电流密度 $\boldsymbol{J}(x,y,z)$ 已知，所占空间为 Ω_J，则电流场强为

$$\boldsymbol{H}_s=\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_J}\boldsymbol{J}\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\Omega_J \tag{2-42}$$

式中，$\boldsymbol{J}(x,y,z)$ 为电流密度矢量；R 为从场点到源点间的距离；$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$ 的方向从源点

指向场点。

磁化场强为 $\boldsymbol{H}_m = -\nabla\varphi_m$，则简化标量位的积分方程为

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_M} \boldsymbol{M}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\Omega_M \tag{2-43}$$

式中，Ω_M 为铁磁物质所占有的区域；$\boldsymbol{M}$ 为磁化强度矢量，有 $\boldsymbol{M}=\chi\boldsymbol{H}$。

由 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\chi\boldsymbol{H})=\mu\boldsymbol{H}$,有

$$\chi = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \tag{2-44}$$

式中，μ 和 μ_0 分别为铁磁物质和真空的磁导率，系数 χ 决定于导磁介质的特性。

第三节　稳态矢量位方程

一、双旋度方程

恒定电流磁场的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \tag{2-45}$$

由 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，根据矢量恒等式，任意一个矢量函数的旋度的散度恒等于零，则可引入矢量磁位函数 $\boldsymbol{A}$，满足

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2-46}$$

该矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 在整个磁场区域都存在，包括有电流的区域和无电流的区域。

由磁感应强度矢量和磁场强度矢量之间的关系 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，式（2-45）可写为

$$\nabla\times\nu\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J} \tag{2-47}$$

式中，$\nu=1/\mu$ 为介质的磁阻率。对于非线性介质，ν 不仅是坐标的函数，而且是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的函数，也即是矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的函数。

式（2-47）称为双旋度方程（Curl-curl equation）。

对于直角坐标系，将式（2-47）写成分量形式，可得到三个方程式为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]=J_x \tag{2-48}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]=J_y \tag{2-49}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]=J_z \tag{2-50}$$

对于二维平面场（$x-y$ 平面），矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 相互平行且只有 z 方向分量，即，$A_x=A_y=0$，$A_z=A$；$J_x=J_y=0$，$J_z=J$，则由式（2-50）可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-J \tag{2-51}$$

上式为椭圆型方程，是二维形式的泊松方程，适用于非线性介质。

二、矢量泊松方程

为了达到矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间关系的相互单值性，对于稳态磁场，引入库

仑规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{2-52}$$

利用矢量恒等式$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$，则双旋度方程可转化为矢量泊松方程，即

$$(\nabla \cdot \nu \nabla)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} \tag{2-53}$$

对于直角坐标系，可写作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\right) = -\boldsymbol{J} \tag{2-54}$$

写成分量形式，可得到三个方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = -J_x \tag{2-55}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = -J_y \tag{2-56}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = -J_z \tag{2-57}$$

对于均匀线性介质，式（2-53）可简化为

$$\nu \nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} \tag{2-58}$$

三、积分方程

对应于矢量位微分形式的泊松方程式（2-53），对于均匀介质，其积分形式为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\nu}\int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{J}}{R} \mathrm{d}\Omega \tag{2-59}$$

式中，$\boldsymbol{J}$ 为电流密度分布函数；R 为从场点到源点的距离。

式（2-59）只适用于均匀介质。当场域中存在非线性的铁磁介质时，可将磁化了的铁磁体看作为在真空介质中存在顺序排列的分子电流。设分子电流密度为 $\boldsymbol{J}_m$，铁磁物质的磁化程度以磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 表示

$$\nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_m$$

引入分子电流概念后，就可以将整个介质都看作为真空介质，场域中任一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为导体中传导电流密度 $\boldsymbol{J}$ 产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_J$ 和铁磁体中分子电流密度 $\boldsymbol{J}_M$ 产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_M$ 之和。设矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 分为电流矢量位 $\boldsymbol{A}_J$ 和磁化矢量位 $\boldsymbol{A}_M$ 两部分，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_J + \boldsymbol{A}_M \tag{2-60}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_J = \nabla \times \boldsymbol{A}_J$$

$$\boldsymbol{B}_M = \nabla \times \boldsymbol{A}_M$$

则相应的积分方程为

$$\boldsymbol{A}_J = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{J}}{R} \mathrm{d}\Omega \tag{2-61}$$

$$\boldsymbol{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\nabla \times \boldsymbol{M}}{R} \mathrm{d}\Omega \tag{2-62}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com