帮你走出高考误区

数学

主编 田同文 盖根柱

民出版社

帮你走出高考误区

（数 学）

河 南 人 民 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

帮你走出高考误区:数学/闪光等主编。—郑州:河南人民出版社。1999.4

ISBN 7-215-04479-3

Ⅰ.帮… Ⅱ.闪… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 07644 号

河南人民出版社出版发行(郑州市农业路 73 号)

博爱县教育印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 9.375 字数 199 千字

1999 年 4 月第 1 版 1999 年 4 月第 1 次印刷 印数 1—5200 册

定价:9.00 元

丛书主编　闪　光　李慧诚　黎　灵

副 主 编　马玉芳　田同文　李明胜

高中数学

分册主编　田同文　盖根柱

副 主 编　马玉芳　孙美义　李明胜

编　　委（按姓氏笔画为序）

王肇堃　李金柱　李维夺　张国平

郝玉俊　贺桂元　周祖成　肖冰生

内容提要

本书对高中数学中的重点、难点、疑点及历年来高考试题答卷中常见的解题错误，分门别类作了系统而精辟的分析，简明、通俗、示范性地给出了解题思路、常用解法和特殊技巧，以使学生开阔视野、澄清概念、掌握方法、避免失误，收到触类旁通、举一反三的效果，进而为提高学生知识水平、应试能力和数学素质，帮助学生走出高考解题误区，赢得高分，升入大学奠定坚实基础。本书又是中学数学教师备课、辅导必备的参考资料，具有广泛的可读性和实用性。

目　录

一、概念不清致错

王肇堃

基本概念是数学的灵魂.准确理解基本概念、把握概念的内涵及外延是学好数学的基础.所谓概念不清,就是指不能准确理解概念,把握概念的内涵及外延.在数学解题中,很容易发生概念性错误,最常见的解题错误就是概念性错误.

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{3}{8}\cdot 2^n$,这个数列是不是等比数列?

【错解】$\because a_1=\frac{3}{4},a_2=\frac{3}{2},a_3=3,a_4=6,$

$\therefore\quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=2.$

$\therefore$ 该数列是等比数列.

【分析】错解对等比数列的定义理解不清,仅从有限的几个比值等于2就断定该数列是等比数列是不恰当的.

【正解】$\because\quad a_n=\frac{3}{8}\cdot 2^n,\therefore\quad a_{n+1}=\frac{3}{8}\cdot 2^{n+1}.$

$\therefore\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{8}\cdot 2^{n+1}/\frac{3}{8}\cdot 2^n=2.$

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等比数列.

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3\cdot 2^n+a$(a是常数),该数列是不是等比数列?

【错解】$\because a_n=s_n-s_{n-1}=3\cdot 2^n+a-(3\cdot 2^{n-1}+a)=3\cdot 2^{n-1}$,

$\therefore\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3\cdot 2^n}{3\cdot 2^{n-1}}=2$ 是常数.

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等比数列.

【分析】易知 $a_1=s_1=6+a$,$a_2=6$. 当 $a=0$ 时,$\dfrac{a_2}{a_1}=1\neq 2$,可见解法有错. 其原因是对由 S_n 求 a_n 的方法理解有误. 事实上,$a_n=S_n-S_{n-1}$ 并不是对任意的 $n\in N$ 都成立,而应该是 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\ S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2).\end{cases}$

【正解】$\because\quad a_n=\begin{cases}6+a & (n=1),\\ 3\cdot 2^{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时,$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3\cdot 2^n}{3\cdot 2^{n-1}}=2$. 而$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{6}{6+a}$,

$\therefore$ 当 $a=-3$ 时,$\dfrac{a_2}{a_1}=2$,数列$\{a_n\}$是等比数列;

当 $a\neq -3$ 时,$\dfrac{a_2}{a_1}\neq 2$,数列$\{a_n\}$不是等比数列.

3. 化简 $\arcsin\left(\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$.

【错解】$\arcsin\left(\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)=\dfrac{5}{3}\pi$.

【分析】由于对反正弦函数定义理解不清导致错误. $\arcsin(\sin x)=x$ 并不是对于任意的 x 都成立,只有在$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时才成立. 事实上,令 $\arcsin(\sin x)=y$,则$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,且 $\sin y=\sin x$. 若 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则 $y=x$,而 $\dfrac{5}{3}\pi\notin$

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\arcsin\left(\sin\frac{5}{3}\pi\right)\neq\frac{5}{3}\pi$.

【正解】$\arcsin\left(\sin\frac{5}{3}\pi\right)=\arcsin\left[\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

注：一般地，

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases}x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\\ x', x'\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\text{且 }\sin x=\sin x'.\end{cases}$$

4. 用反正弦表示 $2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

【错解】令 $\alpha=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$，则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}\left(\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi\right)$.
$\therefore\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$. $\therefore 2\alpha=\arcsin\left(-\frac{24}{25}\right)$，故 $2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin\left(-\frac{24}{25}\right)$.

【分析】由反正弦函数的定义可知，只有当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，才能由 $\sin x=a$ 得 $x=\arcsin a$. 而本题中，$2\alpha\in\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$，因此 $2\alpha\neq\arcsin\left(-\frac{24}{25}\right)$.

【正解】同错解可知 $\sin2\alpha=-\frac{24}{25}$. 由诱导公式，得 $\sin(2\pi-2\alpha)=\frac{24}{25}$. 因$\frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi$，故 $0<2\pi-2\alpha<\frac{\pi}{2}$. 所以 $2\pi-2\alpha=$

$\arcsin\frac{24}{25}$, $2\alpha=2\pi-\arcsin\frac{24}{25}$, 即 $2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=2\pi-\arcsin\frac{24}{25}$.

5. 满足 $z+\frac{5}{z}$ 是实数，$z+3$ 的辐角主值是 $\frac{3}{4}\pi$ 的虚数 z 是否存在？

【错解】设虚数 $z=x+yi$，由 $z+\frac{5}{z}\in R$，得 $x^2+y^2=5$. 又 $z+3$ 的辐角主值是 $\frac{3}{4}\pi$，即 $\arg(z+3)=\frac{3}{4}\pi$，取正切，得 $\frac{y}{x+3}=-1$，与 $x^2+y^2=5$ 联立，解得 $z=-1-2i$ 或 $z=-2-i$.

【分析】上述解法由 $\arg(z+3)=\frac{3}{4}\pi$，即 $\arg[(x+3)+yi]=\frac{3}{4}\pi$ 取正切时扩大了 x、y 的取值范围，这是由对复数辐角主值理解模糊所致.

【正解】$\arg(z+3)=\frac{3}{4}\pi$ 只表示如图 1—1 中从 -3 对应的点出发，倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的射线. 从图上显然可以看出，该射线与圆 $x^2+y^2=5$ 没有公共点，故满足条件的虚数 z 不存在.

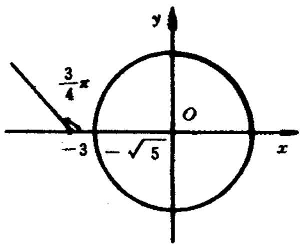

图 1—1

6. 设复数 $z_1=\sin\theta$, $z_2=i\cos\theta$, $0<\theta<\pi$，则 z_1+z_2 的辐角主值是

(A) θ;　　　　(B) $\frac{\pi}{2}-\theta$;

(C) $\frac{5}{2}\pi-\theta$;　　　(D) $\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $\frac{5}{2}\pi-\theta$.

【错解 1】∵ $z_1+z_2=\sin\theta+i\cos\theta, 0<\theta<\pi$,

∴ z_1+z_2 的辐角主值是 θ. ∴ 选(A).

【错解 2】∵ $z_1+z_2=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$,

∴ z_1+z_2 的辐角主值是 $\frac{\pi}{2}-\theta$. ∴ 选(B).

【错解 3】∵ $z_1+z_2=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\theta\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)$,

∴ z_1+z_2 的辐角主值是 $\frac{5\pi}{2}-\theta$. ∴ 选(C).

【分析】上述解法均由于对复数的有关概念不清而致错. 错解 1 是复数的三角形式不清;错解 2 和 3 是对辐角主值范围不清.

【正解】∵ $0<\theta<\pi$, 当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, $z_1+z_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$; 当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时, $z_1+z_2=\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\theta\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)$. 从而可知,应选(D).

7. 已知 $A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,若 $a\in A$,则 $6-a\in A$. 问满足条件的集合 A 有几个?

【错解】∵ $a\in A$,且 $6-a\in A$,

∴ A 中的元素应满足 $a+(6-a)=6$.

$\because\ A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，

$\therefore$ A 中的元素应是 1 与 5，2 与 4，3 与 3 这三对数中任取一对、二对、三对所组成的集合，其总数有 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$.

【分析】错解对集合中的有关概念不清楚，忽略了空集是任何集合的子集这一点.

【正解】若 A 不是空集，同上解有 7 个；若 A 是空集 $\varnothing$，因"若 $a\in A$，则 $6-a\in A$"$\Leftrightarrow$"若 $6-a\notin A$，则 $a\notin A$". 而"$6-a\notin\varnothing=A$，则 $a\notin\varnothing=A$"成立，$\therefore$ $A=\varnothing$ 满足条件.

综上可知，满足条件的集合 A 有 8 个.

8. 三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle APB=45°$，$\angle BPC=60°$，$\angle APC=90°$，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

【错解】如图 1－2. 过 A 作 $AD\perp PB$ 于 D，过 C 作 $CD\perp PB$ 于 D，则 $\angle ADC$ 为二面角 $A-PB-C$ 的平面角，设为 θ. 又设 $PD=x$，在 $Rt\triangle PAD$ 中，$\because$ $\angle APD=45°$，$\therefore$ $AD=PD=x$，$PA=\sqrt{2}x$. 在 $Rt\triangle PDC$ 中，$\because$ $\angle BPC=60°$，$\therefore$ $DC=\sqrt{3}x$，$PC=2x$. 在 $Rt\triangle APC$ 中，$AC^2=PA^2+PC^2=2x^2+4x^2=6x^2$. 在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $\cos\theta=(AD^2+DC^2-AC^2)/2AD\cdot DC=(x^2+3x^2-6x^2)/2x\sqrt{3}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

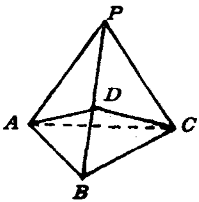

图 1－2

【分析】上解错在二面角概念不清，过 A 作 $AD\perp PB$ 后点 D 已经确定，而 C 点也是确定的，只有连接 CD，而不能通过 C 作 $CD\perp PB$. 事实上，$\angle ADC$ 是否二面角 $A-PB-C$ 的平面角，并未交待清楚.

【正解】在棱 PB 上任取一点 D，过 D 分别在平面 PAB 和平面 PBC 上作棱 PB 的垂线分别交 PA 于 E，交 PC 于 F，连接 EF，则 $\angle EDF$ 就是二面角 $A-PB-C$ 的平面角，设为 θ，又设 $PD=x$，以下同错解，略.

9. 若 E、F、G 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、AD、DC 的中点，$\angle EFG=100°$，求对角线 BD 与 AC 所成的角(如图 1—3).

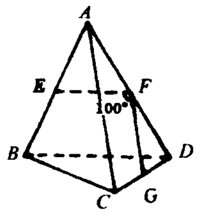

图 1—3

【错解 1】∵ E、F、G 分别是 AB，AD，DC 的中点，

∴ $AC /\!/ FG$，$BD /\!/ EF$.

∴ EF 与 FG 所成的角为 BD 与 AC 所成的角.

∵ $\angle EFG=100°$，

∴ 对角线 BD 与 AC 所成的角为 $100°$.

【错解 2】对角线 BD 与 AC 所成的角为 $100°$或 $80°$(推理过程同错解 1).

【分析】两条异面直线所成的角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，错解正是忽略了这一点.

【正解】∵ $FG /\!/ AC$，$EF /\!/ BD$，

∴ AC 与 BD 所成的角是 EF 与 FG 所成的锐角.

∵ $\angle EFG=100°$，

∴ 异面直线 AC 与 BD 所成的角是 $180°-100°=80°$.

10. 平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $2a$ 的

点的轨迹是(　　).

(A)椭圆；　　(B)线段 F_1F_2；

(C)无轨迹；　　(D)以上情况都有可能.

【错解】选(A).

【分析】椭圆的定义是“平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$的点的轨迹”. 错解对此定义模糊不清,对定义中的条件 $2a>|F_1F_2|$ 未给予重视,就盲目断言为椭圆,错选为(A). 事实上,当 $2a>|F_1F_2|$ 时,轨迹是椭圆;当 $2a=|F_1F_2|$ 时,轨迹是线段 F_1F_2;当 $2a<|F_1F_2|$ 时,无轨迹.

【正解】选(D).

11. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的一点 P 到左准线的距离是 $\frac{5}{2}$,则点 P 到右焦点的距离是(　　).

(A)2;　　(B)4;　　(C)6;　　(D)8.

【错解】设点 P 到右焦点的距离为 d,因为椭圆长半轴长为 5,短半轴长为 3,半焦距为 $\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

由圆锥曲线的统一定义,可知 $e=\frac{d}{\frac{5}{2}}$.

$\therefore\ d=\frac{5}{2}e=\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}=2$. 故选(A).

【分析】由于对圆锥曲线的统一定义理解不清楚,从而造成错解. 圆锥曲线的统一定义是“当定点不在定直线上时,与此定点和定直线的距离之比是常数 e 的动点轨迹,当 $0<e<1$

时，轨迹是椭圆.”这里要特别注意，常数 e 是动点到定点的距离和与之对应的定直线的距离之比.事实上，错解中的 $d=2$ 是点 P 到左焦点的距离，并非是到右焦点的距离.

【正解】$\because$ 点 P 到左焦点的距离 $d=\frac{5}{2}e=2$，又由椭圆定义，得点 P 到右焦点的距离为 $2a-d=10-2=8$，故选(D).

12.如图 1－4，E、F 分别是二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的两个面上的两点，若 E、F 到棱 AB 的距离相等，那么直线 EF 和平面 α、β 所成的角一定是(　　).

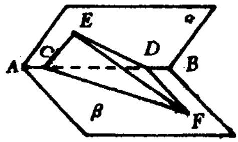

图 1－4

(A)相等的；　(B)不相等；

(C)有可能相等，也有可能不相等；

(D)无法比较.

【错解】在 α 内作 $EC\perp AB$ 于 C，在 β 内作 $FD\perp AB$ 于 D，由题意知，$EC=FD$，连 CF、DE.

$\because$ $CD=CD$，$\therefore$ $Rt\triangle ECD\cong Rt\triangle FDC$.

$\therefore$ $ED=FC$.又 $EF=EF$，

$\therefore$ $\triangle ECF\cong\triangle FDE$.因此$\angle EFC=\angle FED$.故选(A).

【分析】在解本题的过程中，根据推理，貌似正确.但细作分析可发现$\angle EFC=\angle FED$ 是无疑的，但它们都不是 EF 与平面 α、β 所成的角，即在概念上发生了错误.然而 EF 与 α、β 所成的角绝非不相等和无法比较，例如平面 α 垂直于平面 β，或 $EF\perp AB$ 时，EF 与平面 α、β 所成的两个角就相等.就一般

情况，也可以证明相等.（留给读者完成）.

【正解】选(A).

13. 平面 $M\cap N=a$，过 a 上一点 A 在平面 M 内作不与 a 重合的直线 AC，过 a 上另一点 B 在平面 N 内作不与 a 重合的直线 BD，如图 1—5，且使 $\angle CAB=\angle DBA$，则 AC 与 BD 的位置关系如何？

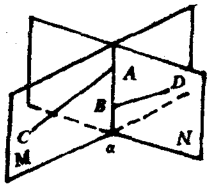

图 1—5

【错解】∵ AC、BD 分别交 a 于 A、B 且 $\angle CAB=\angle DBA$，根据"内错角相等，则两直线平行"，可知 $AC/\!/BD$.

【分析】本题在解答过程中，忽略了 AC、BD 分别在平面 M、N 内且均不与两平面的交线 a 平行，又与 a 分别交于 A、B 两点.

【正解】AC 与 BD 是两条异面直线.

14. 已知函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$，则它的反函数为(　　).

(A) $y=\arcsin x$；

(B) $y=\begin{cases}\arcsin x, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{\pi}{2}+\arcsin x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

(C) $y=\begin{cases}\arcsin x, & -1\leqslant x<0,\\ \pi-\arcsin x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

(D) 没有反函数.

【错解】选(A)或(D).

【分析】选(A)者认为只要涉及到的是正弦函数的反函数就是反正弦函数，而忘了只有函数 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$(注意括号中的条件)的反函数才是 $y=\arcsin x$.

选(D)可能是注意了 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，但发现与定义中的 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 不符合，就认为没有反函数，其实只要符合具有反函数条件的函数都有反函数，这正是对于 $y=\sin x$ 由 $x\in R$ 改为研究 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的道理，明确了这个问题就知道改法有无穷多种.

【正解】选(C).

当 $-1\leqslant x<0$ 时，其反函数为 $y=\arcsin x$ 容易理解. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\arcsin x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\pi-\arcsin x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 且 $\sin(\pi-\arcsin x)=x$，从而知应选(C).(用特殊值检验可加深理解).

15. 证明 $\cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$.

【错证】令 $\arcsin x=\alpha$，则 $\sin\alpha=x$.

$\cos(\arcsin x)-\arcsin(\cos x)$

$=\cos\alpha-\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$=\cos\alpha+x-\frac{\pi}{2}=\cos\alpha+\sin\alpha-\frac{\pi}{2}$

$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\leqslant\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}<0.$

$\therefore\quad \cos(\arcsin x)<\arcsin(\cos x)$.