高中数学
专题辅导

第三册

北京西城区教研中心

北京师范大学出版社

高中数学专题辅导

第三册

北京市西城区中学教研中心

北京师范大学出版社

高中数学专题辅导
第三册
北京市西城区中学教研中心

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：8　字数：168千
1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷
印数：1—82,000
统一书号：7243·358　定价：1.25元

前　言

为配合高三学生数学总复习和高中学生平时的学习，组织我区部分有经验的老师，按照教学大纲的要求，分科分单元编写这套专题练习题，主要目的是在掌握各科所学内容的基础上，灵活地运用所学知识，掌握数学方法以及学科之间的沟通和联系。更快地提高学生分析和解决问题的能力，特别是解综合题的能力。

为方便读者，每部分练习题后均附有答案或提示，为检查复习效果，书末分文理科分别附两套综合练习题。

参加本书编写的有：陈萃联（北京三中）、田佣（北京四中）、孙家钰（北京六中）、韩康年（北京七中）、尹俊森（北京十三中）、戴明源（北京三十九中）、俞裕安（北京四十二中）、高怀英（北京五十六中）、马淑玲（北京一五六中）、张春条（北京师大实验中学）、张自文（北京师大二附中）及北京西城区教育局中学教研室数学组的同志等。

由于时间较紧，不免有些错误，请批评指正。

北京市西城区中学教研中心

目 录

代数部分

一　集合与函数

（一）集合与映射

1. 已知$A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$，

（1）若$A\cap B=\phi$，求a的取值范围；

（2）若$A\subset B$，求a的取值范围。

2. 已知A、B是以某些实数为元素的两个集合，

$A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$，

$B=\{-4, a+3, c^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$，

且$A\cap B=\{2, 5\}$，求实数a，并求$A\cup B$。

3. 数集$X=\{(2n+1)\pi$，n是整数$\}$，数集$Y=\{(4k+1)\pi$，k是整数$\}$

指出：数集X与数集Y的关系，并给出证明。

4. 设$I=\{x|x$为小于20的正偶数$\}$，I为全集，

若$A\cap\overline{B}=\{12, 14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2, 4, 16, 18\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$，求集合$A$、$B$。

5. 设全集$I=R$，$A=\{x|-5<x<5\}$，$B=\{x|5\leqslant x<7\}$

求$A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$。

6. X是所有三角形的集合，Y是所有圆的集合；映射：把每个三角形映射成它的内切圆。

（1）确定映射的对应关系$x \to$ ______ $(x \in X)$；

（2）定义域______；

（3）值域______；

（4）对于每个$y \in Y$的原象有______个。

7. 在R上定义的三个函数$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$，已知

$A=\{x|f(x)=0\}$，$B=\{x|g(x)=0\}$，$C=\{x|h(x)=0\}$

（1）试用集合A、B、C表示$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=0$成立的$x$的集合；

（2）试用集合A、B、C表示使$f(x)=0$与$g(x)h(x)=0$同时成立的x的集合。

8. 判断下列集合间的对应关系f：$A \to B$，

哪些是从A到B的映射？哪些映射是A到B内的映射？哪些映射是A到B上的映射？哪些是从A到B上的一一映射？

（1）$A=\{\text{矩形}\}$，$B=R^+$，f：$x \in A \xrightarrow{y=x\text{的面积}} y \in B$；

（2）$A=\{2, 3\}$，$B=\{3, 5\}$，f：$x \in A \xrightarrow[y]{\frac{x}{y}<1} y \in B$；

（3）$A=N$，$B=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \cdots\cdots\right\}$

f：$x \in A \xrightarrow{y=\frac{x}{2x+1}} y \in B$；

（4）$A=[-1, 1]$，$B=[0, 1]$

f：$x \in A \xrightarrow{y=\sqrt{1-x^2}} y \in B$；

（5）$A=R^+ \cup R^-$，$B=R$

f：$x\in A \xrightarrow{y=x^{\frac{1}{3}}} y\in B$；

（6）$A=Z$，　$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

f：$x\in A \xrightarrow{y\text{为}x^2\text{的个位数字}} y\in B$。

9. 下列的对应是不是集合A到集合B的映射？为什么？

（1）$A=R$，$x\in R$；$B=R^+$，$y\in R^+$

$R \xrightarrow{y=|x|} R^+$；

（2）$A=\overline{R^-}$，$x\in\overline{R^-}$；$B=R^+$，$y\in R^+$

$\overline{R^-} \xrightarrow{x=|y|} R^+$；

（3）$A=\overline{R^-}$，$x\in\overline{R^-}$；$B=R$，$y\in R$

$\overline{R^-} \xrightarrow{|y|=x} R$；

（4）$A=\overline{Q^-}$，$x\in\overline{Q^-}$；$B=\overline{R^-}$，$y\in\overline{R^-}$

$\overline{Q^-} \xrightarrow{|y|=x} \overline{R^-}$。

10. 设f表示集合A到B的映射，按照下列给定的条件，求集合B，考察哪一个是一一映射，并求逆映射。

（1）$A=\{3x|\,0<x<5\text{ 且 }x\in Z\}$，任意$a\in A$，

f：$a\longrightarrow b=\pm\sqrt{a}$；

（2）$A=\{2x^2|-1<x\leqslant 3\text{ 且 }x\in Z\}$，任意$a\in A$，

f：$a\longrightarrow b=2a$。

（二）函数

1. 作出下例函数的图象：

(1) $y=\frac{3x-4}{x-2}$；(2) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\frac{|x|}{x}$；

(3) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$；(4) $y=x^{\frac{3}{2}}$；

(5) $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$；(6) $y=-(x+1)^{\frac{3}{2}}$；

(7) $y=|\log_2 x|$；(8) $y=-\sqrt{1-x^2}$；

(9) $y=\sin|x|$；(10) $y=|\sin x|$。

2．在$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$中，x为实数，求y的取值范围。

3．比较大小：

(1) $\log_{\cos\alpha}\sin\alpha$与$\log_{\cos\alpha}\mathrm{tg}\alpha$　$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\cos[\lg(2ab)]$与$\cos[\lg(a^2+b^2)]$

$(1\leqslant a\leqslant 10,\ 1\leqslant b\leqslant 10)$。

4．已知$y=f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，证明：

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

5．已知$f(x+y)=f(x)+f(y)$对于任意实数x、y均成立
求证(1) $f(0)=0$；(2) $f(-x)=-f(x)$；

(3) $f(2x)=2f(x)$；(4) $f\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}f(x)$。

6．$f(x)$满足$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$($a$、$b$、$c$、均为不等于零的常

数且$a\neq b$)，求$f(x)$。

7．已知$f(x)=\dfrac{bx+1}{2x+a}$(a、b是常数，$ab\neq 2$)，

(1)若$f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)=k$，求$k$；

(2)若$f[f(1)]=\dfrac{k}{2}$，求a、b。

8．写出由下列图形所表示的函数关系式：

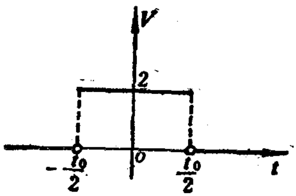

图1—1

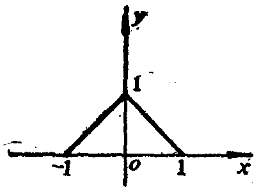

图1—2

9．m为怎样的值时，方程 $2x^2+(m-2)x+(m-5)=0$的一个根大于2，另一根小于2．

10．k为何实数时，方程$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$的两根，分别在(0，1)和(1，2)区间内。

11．已知方程$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)有一非零根x_1，方程$-ax^2+bx+c=0$有一非零根x_2。

求证：方程$\dfrac{a}{2}x^2+bx+c=0$必有一根介于x_1、x_2之间。

12．已知：方程 $2x^2-(3m+n)x+mn=0$中，$m>n>0$，不解方程，证明：

(1)方程有两个不等的实根；

（2）一个根比n大，另一个根比n小。

13．已知方程$2x^2-px+q=0$的解集为A，

方程$6x^2+(p+2)x+5+p=0$的解集为B，

又$A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求$A\cup B$。

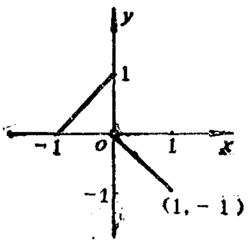

图1—3

14．已知函数在$[-1, 1]$的图象如图1-3所示

（1）写出这个函数的解析式；

（2）这个函数是否存在反函数？若没有，请说明理由，若存在，用解析式把它写出来，并写出这反函数的定义域、值域、画出图象．

15．判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=(ax^2-1)\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$；

（2）$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{x^2+1})$；

（3）$g(x)=F(x)\left[\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right]$，其中$a>0$，$a\neq1$，

$F(x)$是奇函数．

16．如果将二次函数$y=-2x^2+8x-5$的图象开口反向并向上平移得一新抛物线，它与直线$y=mx+1$有一交点（3，4）．求：

（1）这条直线的斜率以及它与y轴正方向的夹角；

（2）这条直线和新抛物线另一交点与原点的距离。

17. 有块尺寸形状如图 1-4 的矩形缺角的钢板，如用这块钢板截取一个内接矩形，使它的一个角是钢板的左下角，问截得矩形长和宽多少时面积最大？最大面积是多少？

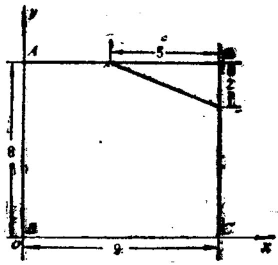

图 1—4

18. 已知 $x^2+y^2-10x+16=0$，求$\frac{y}{x}$的极值。

19. 已知$3x^2+2y^2=6x$，求x^2+y^2的极值。

20. 已知直角三角形的周长为10，求在什么条件下此三角形有最大面积？

21. 设$f(x)$、$g(x)$为单调增函数，证明若$g(x)\leqslant f(x)$，则$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]$。

22. 有两个函数 $f(x)=-x^2+x+p$

及$g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$，设$x=\sin t$。

(1)求使不等式 $1\leqslant f(x)\leqslant\frac{17}{4}$对一切$t$都成立的$p$的范围；

(2)若 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，求使 $4\leqslant g(x)\leqslant 6+2\sqrt{3}$ 成立的t的范围。

23. 画出方程$\sqrt{1-|x|}-\sqrt{1-y}=0$所表示的图形。

24. 已知二次函数$y=f(x)=ax^2+bx+c$（$a>0$）。

（1）当$b>0$时，求二次方程$f(x)=0$没有负根的条件；

（2）当$c<0$时，求$y=|f(x)|$的极值；

（3）若不论k取任何实数，直线$y=k(x-1)-\frac{k^2}{4}$

总与曲线$y=f(x)$相切，求a、b、c的值。

25. 已知抛物线$y=x^2-(m^2+4)x-2m^2-12$。

（1）证明：不论m取什么实数，抛物线与x轴一定有二个交点，且一个交点是（-2，0）；

（2）m取什么实数时，两交点间的距离等于12？

（3）m取什么实数时，两交点间的距离最小？最小距离是多少？

26. 当x取何值时，$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$有极大值，极大值是多少？

27. 求下列函数的反函数，并指出其定义域：

（1）$y=\dfrac{ax-b}{cx-a}$；　　（2）$y=\sqrt[3]{x^3-1}$；

（3）$y=3^x+1$；　　（4）$y=\lg(2x)-1$。

28. 若$f(x)$的定义域为$1\leqslant x\leqslant 4$，求$f(x^2)$、$f(2x)$的定义域。

29. $y=x^2$有没有反函数？在什么情况下才有反函数？若有反函数，求其反函数及反函数的定义域和值域。

30. 求下列函数的反函数，并画出下列函数的图象。

（1）$y=\sqrt{-x-2}$；　　（2）$y=-\sqrt{-2x+2}$。

（三）指数函数与对数函数

1. 已知：$\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a x+\log_a 8$

$+\log_a y$,

且x，y为实数。

求 $\dfrac{\sqrt{x+y-[(2xy)^{-\frac{3}{2}}]^{-\frac{1}{2}}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值。

2. 已知：$\dfrac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\dfrac{y(z+x-y)}{\log_a y}=\dfrac{z(x+y-z)}{\log_a z}$，

求证：$x^y y^x=z^x x^z=y^z z^y$。

3. 解不等式$x^{\log_a x+1}>a^2x(a>1)$。

4. 解不等式$x^{2-(\log_2 x)^2-\log_2 x^2}-\dfrac{1}{x}>0$。

5. 若a、b、c均为不等于1的正数，且$b=\sqrt{ac}$，

求证：$\dfrac{\log_a N}{\log_c N}=\dfrac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}$。

6. 若$(ac)^{\log_a b}=c^2$，则 $\log_b N=\dfrac{1}{2}[\log_a N+\log_c N]$。

7. 求满足条件$x\geqslant1$，$y\geqslant1$，$z\geqslant1$，$xyz=10$，

$x^{\lg x}y^{\lg y}z^{\lg z}\geqslant10$的$x$、$y$、$z$的值。

8. 已知$\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=a$，用$a$表示

$\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)$的值。

9. 已知正数a的常用对数的首数为p，尾数为$q(q\neq0)$，

则$\dfrac{1}{a}$的常用对数的首数、尾数是多少？

10. A、B均为三位数且$B\geqslant900$，B的常用对数的尾数是A的常用对数尾数的2倍，求A、B两数。

11. 已知$2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，求：$x:y$。

12. 若$f(x)=\log_a x$且$x_1>0$，$x_2>0$，

证明：（1）当$a>1$时，

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]；$$

（2）当$0<a<1$时，

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]。$$

13. 作函数$y=3^{\log_3 x^2}-2\cdot 2^{\log_2 x}+1$的图象。

14. （1）已知$\lg 2\approx0.3010$，求满足$2^n>10000$时的最小整数n；

（2）已知$(0.9)^n<0.01$　（$\lg3=0.4771$），

求：整数n的最小值。

15. 设$67^x=27$，$603^y=81$。

证明：$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}+2=0$。

16. 对于正整数a、b、c（$a\leqslant b\leqslant c$）和实数x、y、z、w，若$a^x=b^y=c^z=30^w$，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$成立。求$a$、$b$、$c$的值。

17. 设m是实数，对于方程

$3^{2x+1}+(m-1)(3^{x+1}-1)-(m-3)\cdot3^x=0$，

（1）当$m=4$时，解这个方程；

（2）这个方程有两个不同的根时，求m的取值范围。

18. 在$f(x)=\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}$中，$a$、$b$是正数，若$x>y$，

比较$f(x)$与$f(y)$的大小。

19. 已知$\alpha\beta=10^5$，$\alpha^{\lg\beta}=10^6$（$0<\beta\leqslant\alpha$），

求$\alpha:\beta$的值。

20. t是实数，$x=2^t+2^{-t}$，

$y=4^t+4^{-t}-2a(2^t+2^{-t})$（$a$为常数）。

（1）求y的最小值；

（2）当$y=0$时，求x的值。

二 不等式

1. 设$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，

则$(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})\geqslant\dfrac{25}{4}$。

2. 求证：$\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2$。

3. 若$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则$\mathrm{tg}x+\sin x>4\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$。

4. 已知$-1<a<1$，$-1<b<1$，

则$-1<\dfrac{a+b}{1+ab}<1$。

5. $x\in R$，则$\dfrac{x^2-2x\cos\alpha+1}{x^2-2x\cos\beta+1}$