高等数学

（第二册）

欧维义　陈维钧　金德俊　编

吉林大学出版社

高 等 数 学

第 二 册

欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉 林 大 学 出 版 社

高 等 数 学
（第二册）
欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷
吉林省新华书店发行
850×1168 大32开 13.625印张 339,000字
1986年10月第1版 1986年10月第1次印刷
印数：1－7,000册

统一书号：13323·18 定价：3.10元

出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆继出版。

吉林大学出版社

序

《高等数学》一书共四册。第一册讲一元微积分和空间解析几何；第二册讲多元微积分和场的数学描写方法；第三册讲级数和常微分方程；第四册讲线性代数。

本教材在课程结构上，我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法（如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等）。

在应用方面，我们注重物理、力学对数学的渗透，并尽可能地使学生获得应用方面的信息。

在培养能力方面，关键是培养学生有效地使用数学工具。为达到这个目的，重要的途径是解题。多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力。为此，在本教材各节之后，多数都配备了A、B、C三类习题。一般说，A类题是理解和消化所学内容的基本题；B类题是体现课程要求的中挡题；C类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题。

总之，本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索。希望在同样的教学时间内，获得更好的教学效果。

在编写教材的过程中，得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助；得到赵为礼、王毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限，错误和不妥之处，敬请读者指正和批评。

编　者

1986年4月于吉林大学

目　　录

第一篇　多元微分学

在本教材的第一册里，我们讲了一元微积分学。其实微分学与积分学的那些概念和方法完全可以很自然地推广到多个自变量的函数的情形。

从一元函数转到二元函数，从方法到结果都会出现某些本质上不同的东西。但是再增加自变数的数目时，方法和结果出现本质上是新东西的情形相对说就少了（不排除技术上可能存在颇大的困难）。因此，关于多元函数，我们主要研究二元函数和三元函数。

本篇内容包括：多元函数的极限和连续性、多元函数的微分法、多元微分学的应用等三章。学习这部分内容时，应注意与一元函数有关理论的联系和差异。

第一章　多元函数的极限和连续性

§1　多元函数的基本概念

1.1　由多个因素确定的量

在实际问题中，经常会遇到多个变量之间存在着一种确定的关系的情形。举例如下：

例1.1　许多实际气体、如氢气、氧气、氮气、氦气等等，在常温常压下，它们的性质比较理想，可以认为它们符合气体状态方程

$$P=\frac{R\cdot T}{V}$$

这里 P,T,V 依次代表气体的压强、绝对温度、体积，R 是与所论气体有关的一常数。对于给定的一种气体，如果知道了它的 T 和 V 的值，根据状态方程，我们就能唯一地确定一个 P 值。这里 P 由两个独立的变量 T 和 V 来确定。

例1.2 在一个直流电路中，电流 I 由电压 V 和电阻 R 所确定。它们之间的关系为

$$I=\frac{V}{R}$$

如果知道了 V 和 R 的一组值，电流 I 也就唯一地被确定。

例1.3 河里的水在每一点 (x,y,z) 处有一个速度 $\boldsymbol{v}=\{v_1,v_2,v_3\}$。我们知道水在河道当中流得比较快，在靠近岸边的地方就流得比较慢，在河面窄的地方水往往比河面宽的地方流得急一些。所以在给定时刻，河里每一点处，水流速度的三个分量 v_1,v_2,v_3 都应该由点的位置来确定，即

$$\boldsymbol{v}=\{v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z)\}$$

假如还要考虑潮水的涨落等等，那就还应该考虑时间因素，于是，每一个速度分量就要由四个变量 x,y,z,t 来确定。

1.2 多元函数的概念

定义1.1 设有三个变量 x,y,u，点 (x,y) 组成的集合为 D。如果对于 D 中的每个点 (x,y)，都可以根据某一确定的“对应规则”求得 u 的唯一的一个值，则称变量 u 是变量 x,y 的一个二元函数，记成

$$u=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

称 x,y 为自变量，u 为因变量，点集 D 为函数的定义域，“f”为函数的对应关系，数集 $\{u|=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$ 为函数的值域。

根据这个定义可知，只要 (x,y) 有一个取值的“范围”，

同时又存在能用以唯一确定 u 的对应值的“规则” f，就确定了一个函数 $u=f(x,y)$。

函数 $u=f(x,y)$ 在 $x=x_0$，$y=y_0$（或 $(x,y)=(x_0,y_0)$）时的函数值记为 $f(x_0,y_0)$。

因为通常把点记成 $M=(x,y)$，$P=(x,y)$，所以二元函数 $u=f(x,y)$，$u=g(x,y)$ 也简记成 $u=f(M)$，$u=g(M)$ 或 $u=f(P)$，$u=g(P)$ 等等。

如果对于每个给定的点 $(x,y)\in D$，根据“对应规则”求得的 u 的值超过一个，则称变量 u 是变量 x,y 的一个多值函数。

往后，如不作特殊的说明，我们谈论的函数都是指单值函数。

推广二元函数的概念，一般地我们有

定义1.2 设有 $n+1$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u$，点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的集合为 D。如果对于 D 中的每个点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都可以根据某一确定的“对应规则”求得 u 的唯一的一个值，则称变量 u 是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个 n 元函数，记成

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

1.3 函数的定义域

多元函数的定义域 D 比一元函数的定义域的结构要复杂，但是常见的还是点构成的区域、曲面、曲线等。为了说清楚这些对象，我们先来叙述平面点集方面的一些术语和概念。

设 $M_0=(x_0,y_0)$，$M=(x,y)$ 是平面上的点，我们称

$$\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

为 M_0 点和 M 点的距离（有时也记 $d(M,M_0)=\rho(M,M_0)$）。

定义1.3 设 $M_0=(x_0,y_0)$ 是 Oxy 平面上的一个点，$\delta>0$，我们把满足条件

$$\rho(M,M_0)<\delta$$

的一切点 $M=(x,y)$ 组成的集合称为 M_0 的 δ-邻域，记成 $U_\delta(M_0)$，即

$$U_\delta(M_0)=\{M\mid\rho(M,M_0)<\delta\}$$

它是 Oxy 平面上以 M_0 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部。

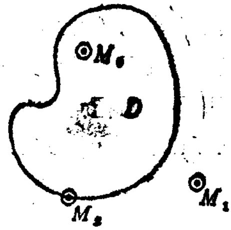

图 1.1.1

定义1.4 设 D 是 Oxy 平面上的点构成的集合（图1.1.1）：

1) 对于给定的点 M_0，若存在一个 $\delta>0$，使得 M_0 的 δ-邻域 $U_\delta(M_0)\subset D$，则说点 M_0 是 D 的一个**内点**；

2) 对于给定的点 M_1，若存在 M_1 点的一个 δ_1-邻域 $U_{\delta_1}(M_1)$，它不含 D 的任何一点，则称点 M_1 为 D 的一个**外点**；

3) 若点 M_2，既不是 D 的内点，又不是 D 的外点，则称 M_2 点为 D 的一个**边界点**。

D 的全部边界点的集合，称为 D 的**边界**，记为 ∂D，即 $\partial D=\{(x,y)\mid(x,y)$ 是 D 的边界点$\}$。

定义1.5 Oxy 平面上的一个点集 D，如果满足条件：

1) D 是一个**开集**：即 D 中的每一点都是内点；

2) D 是**连通的**：即对 D 内任意两点 M_1,M_2，恒有属于 D 的折线联结 M_1,M_2。则称 D 为一**区域**，区域 D 和 D 的边界 ∂D 所构成的集合称为**闭区域**，记为 $\bar{D}$（即 $\bar{D}=D+\partial D$）。

对于区域 D，如果存在原点的一个邻域，使得 D 中所有的点 M，都位于这个邻域内，则说 D 是**有界的**；否则，就说 D 是**无界的**（见图1.1.2）。

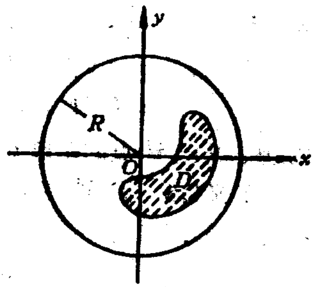

图 1.1.2

定义1.6 设 $x(t)$，$y(t)$ 是两个定义在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的连续函数，则称由方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{1.1}$$

所决定的点集C为Oxy平面上的一条连续曲线；方程(1.1)称为C的参数方程，点$(x(\alpha),y(\alpha))$和$(x(\beta),y(\beta))$分别称为曲线C的起点和终点。对满足条件：

$$\alpha<t_1<\beta,\quad \alpha\leqslant t_2\leqslant\beta,\quad t_1\neq t_2$$

的t_1和t_2，如果有

$$(x(t_1),\ y(t_1))=(x(t_2),\ y(t_2))$$

则称点$(x(t_1),\ y(t_1))$为曲线C的一个重点。

无重点的连续曲线，称为约当(Jordan)曲线，或简单(连续)曲线。

除$(x(\alpha),y(\alpha))=(x(\beta),y(\beta))$(即$C$的起点和终点相重合)外，没有其它重点的连续曲线，称为约当闭曲线或简单(连续)闭曲线。

例1.4 曲线

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant\pi)$$

是一简单曲线；曲线

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

是一简单闭曲线。

一个简单闭曲线C将平面分成两个区域，其中一个是有界的，称为C的内部，记成$I(C)$；另一个是无界的，称为C的外部，记成$E(C)$。

定义1.7 设D是Oxy平面内的一个区域，C是D内任一简单闭曲线。若C的内部也属于D，则称D为一个单连通区域；不是单连通的区域称为多连通区域，多连通区域又称为复连通区域。

例1.5 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

的定义域D，是由Oxy平面上的点$(x,y)\neq(0,0)$组成。这里的