科学版

研究生教学丛书

有限元方法及其应用

李开泰　黄艾香　黄庆怀　编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

有限元方法及其应用

李开泰　黄艾香　黄庆怀　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容包括:有限元方法构造及其在电子计算机实现的全过程,椭圆边值问题变分原理,有限元解的收敛性,非标准有限元方法,以及有限元方法在科学与工程中的应用,并且介绍了作者几年来在工程问题中的部分研究成果.

本书可作为高等院校计算数学、应用数学、应用力学、应用物理等专业和工科硕士研究生的教材.本书对理工科高等院校教师和相关的科技工作者、工程师也是一本有价值的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

有限元方法及其应用/李开泰,黄艾香,黄庆怀编著.—北京:科学出版社,2006

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-016239-0

Ⅰ.有… Ⅱ.①李… ②黄… ③黄… Ⅲ.有限元方法-研究生-教材 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 103474 号

责任编辑:姚莉丽 / 责任校对:钟 洋

责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 2 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2006 年 2 月第一次印刷 印张:27 3/4

印数:1—3 500 字数:544 000

定价:40.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<双青>)

前　　言

由于偏微分方程在理论和实践上的重要性,它的数值解法,长期以来吸引着数学家、物理学家和工程师们的注意.一种数值方法包括它的数学基础和它的实现,都紧紧地依赖于理论数学的发展和计算手段的改善.计算机科学的发展,现代大型高速电子计算机的出现,对数值方法冲击之大,是历史从来未有过的.作为求解偏微分方程的一个强有力手段——有限元方法,正是电子计算机时代的产物.

有限元方法是 R. Courant 于 1943 年首先提出,20 世纪 50 年代由航空结构工程师们所发展,随后逐渐波及到土木结构工程,到了 60 年代,在一切连续统领域,都愈来愈广泛地得到应用.

我国冯康教授和西方科学家各自独立奠定了有限元方法的数学理论基础.由于愈来愈多的数学家加入到发展有限元方法的行列,这种方法便由工程局限性中逐渐解脱出来,代之以统一的观点和严密的数学描述,并确立了它的数学基础.

有限元方法摒弃了刻画自然规律中局部的、瞬时的数学描述而以大范围的、全过程的数学分析作为自己的出发点.局部和整体,瞬时和全过程,只是以两种不同的角度来描述自然现象.一个过程,既可以被微分方程所描述,又服从相应的变分原理,方法虽然不同,但却从不同的侧面来反映同一自然规律.

数值分析的任务,就是从无限维空间转化到有限维空间,把连续统转变为离散型的结构.有限元方法是利用场函数分片多项式逼近模式来实现离散化过程的,也就是说,有限元方法所依赖的有限维子空间,其基函数系是具有有限支集的函数系,这样的函数系与大范围分析相结合,反映了场内任何两个局部地点场变量的相互依赖关系.任何一个局部地点,它的影响元素集,正是基函数本身和它的支集.在线性力学范畴里,场内处于不同位置的力相互作用产生的能量,可用双线性泛函来表示 $B(\varphi_i,\varphi_j)$,其中 φ_i、φ_j 正是相应位置的基函数.$B(\varphi_i,\varphi_j)$ 的大小与 φ_i、φ_j 支集的交集大小有关,如果两个支集的测度为0,则 $B(\varphi_i,\varphi_j)=0$,因此,离散化所得到的方程其系数矩阵是稀疏的.若区域分割细小化,则支集不相交的基函数对愈多,矩阵也就愈稀疏.这给数值解法带来了极大的方便.

有限元方法之所以能获得如此迅速的发展和广泛的应用,是因为它具有独特的优越性.如以往常用的差分方法,其不足之处是,由于采用的是直交网格,因此它较难适应区域形状的任意性,而且区分不出场函数在区域中轻重缓急之差异,此外它还有编制不出通用程序的困难.然而,有限元方法可以用任意形状的网格分割区域,还可以根据场函数的需要疏密有致地、自如地布置节点,因而对区域的形状有

较大的适应性. 另外, 有限元方法在实用上更大的优越性还在于, 它与大容量的电子计算机相结合, 可以编制通用的计算程序, 代表着数值计算方法的进步; 反过来也促进了计算机的科学的发展. 如果忽视了这一点, 就会低估有限元方法的价值.

耗资几百万美元, 投入上百个人年的大型有限元分析程序系统不断产生, 一种工程应用软件学科已经形成. 在高等院校理工科的许多专业里已把有限元方法作为大学生或研究生的必修课程. 如何用尽量少的教学时数, 使学生掌握有限元方法及其在电子计算机上实现的技巧和在各种领域中的应用, 如何使计算数学、应用数学研究生获得恰当的有限元数学理论基础并能独立地开展有限元方法理论和实践方面的研究, 是编写本书的宗旨.

本书第 1～3 章中, 论述了有限元方法结构及其在电子计算机上如何实现; 第 4～5 章是有限元方法的数学基础知识; 第 6 章介绍了部分非标准有限元; 第 7～9 章是有限元方法在一些领域中的应用, 可根据不同的专业选用, 使学生获得必要的应用背景材料和技巧.

本书经过多次教学实践, 取得了良好的效果. 其内容可作为高等院校理工科研究生和计算数学、应用数学、应用力学、应用物理等专业学生的教材, 也可作为有关教师和工程师的参考资料.

参考文献中还选取了一些国内有限元方法专家学者最近几年来新的成果, 以供进一步学习、参考.

在编写本书过程中, 得到了林群、石钟慈、周天孝、应隆安、黄明游等教授的支持与帮助, 作者在此表示衷心的感谢!

作　者

2005 年 7 月

目　录

第 1 章　有限元方法构造

有限元方法是一种数值方法,用它来求解一般场的问题时,大致要经过如下几个过程:

1) 寻找与原问题相适应的变分形式;

2) 建立有限元子空间,即选择元素类型和相应的形状函数;

3) 单元刚度矩阵、单元列阵的计算和总刚度矩阵、总列阵的合成;

4) 边界条件的处理和有限元方程组求解;

5) 回到实际问题中去.

第 1～3 章对上述前四个过程给予系统的论述.

1.1　Galerkin 变分原理和 Ritz 变分原理

以二维线性问题为例.考察问题

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=f(x,y), \\ u\mid_{\Gamma_1}=0, \\ \left[p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x,y)u\right]_{\Gamma_2}=g(x,y), \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 Ω 是 R^2 中的连通区域,它的边界 $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 分段光滑. $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向, $p(x,y)$ 一阶连续可导且 $p(x,y)\geqslant p_0>0$, $\sigma(x,y)$ 连续且 $\sigma(x,y)\geqslant 0$.

用 $C^r(\Omega)$ 记 Ω 上一切 r 阶连续可导函数的全体.

如果函数 $u(x,y)\in C^2(\Omega)$,且在 Ω 内及 $\partial\Omega$ 上满足(1.1.1),那么称 $u(x,y)$ 为定解问题(1.1.1)的古典解.

以下讨论(1.1.1)的弱解.在范数

$$\| u \|_{1,\Omega}^2=\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2+u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.2}$$

下完备化 $C^\infty(\Omega)$ 所得到的函数空间记为 $H^1(\Omega)$,若引进内积

$$(u,v)_1=\iint_\Omega (u_xv_x+u_yv_y+uv)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1.1.3}$$

则 $H^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间,这类 Hilbert 空间称为一阶 Sobolev 空间.将 Ω 上一切无限可微且支集在 Ω 内函数的全体记为 $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数(1.1.2)下完备化得

到的空间记为 $H_0^1(\Omega)$. 它也是 $\{v: v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$.

设 $C_\#^\infty(\Omega) = \{v: v \in C^\infty(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\}$, $C_\#^\infty(\Omega)$ 在范数(1.1.2)下完备化所得到的空间等价于

$$V = \{v: v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\},$$

在 V 上赋予内积(1.1.3),则 V 也是一个 Hilbert 空间,且

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega).$$

引进双线性泛函

$$B(u,v) = \iint_\Omega (pu_xv_x + pu_yv_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} \sigma uv \, \mathrm{d}s, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega). \tag{1.1.4}$$

在(1.1.4)中,当固定 u 时, $B(u,v)$ 是 v 的线性泛函,而固定 v 时,则是 u 的线性泛函. 换句话说,若 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为任意常数,那么

$$\begin{aligned}
&B(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2, \beta_1v_1 + \beta_2v_2)\\
&= \alpha_1\beta_1B(u_1,v_1) + \alpha_1\beta_2B(u_1,v_2)\\
&\quad + \alpha_2\beta_1B(u_2,v_1) + \alpha_2\beta_2B(u_2,v_2), \quad \forall u_1,u_2,v_1,v_2 \in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

可以证明(1.1.4)具有下列性质.

(1) 对称性. 即

$$B(u,v) = B(v,u). \tag{1.1.5}$$

(2) 在 $V \times V$ 上连续. 即存在一个常数 $M > 0$,使得

$$|B(u,v)| \leqslant M \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \qquad \forall u,v \in V. \tag{1.1.6}$$

(3) 在 V 上是强制的. 即存在常数 $\gamma > 0$, 使得

$$B(u,u) \geqslant \gamma \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall u \in V. \tag{1.1.7}$$

显然,

$$f(v) = \iint_\Omega fv \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} gv \, \mathrm{d}s$$

是 v 的线性连续泛函.

(1.1.1)相应的 Galerkin 变分问题是:求 $u \in V$,使得

$$B(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V. \tag{1.1.8}$$

满足(1.1.8)的解 u 称为(1.1.1) 的弱解,将弱解所在的空间称为容许空间,也称试探空间. 同时由于(1.1.8) 必须对 V 中任一元素 v 都要成立,故称 V 为检验空间. 如果变分问题的容许空间和检验空间取同一个 Hilbert 空间 V,这时又称 V 为能量空间.

由于变分问题(1.1.8) 中已含 Γ_2 上的条件,因此边界 Γ_2 上的这类条件称为自然边界条件. 边界 Γ_1 上的条件称为本质边界条件,也称为强加边界条件.

(1.1.1)的古典解与弱解的关系,由下列命题给出.

命题 1.1 设 $u \in C^2(\Omega)$. 若 u 是(1.1.1) 的古典解,则 u 是(1.1.1) 的弱解. 反之,若 u 是(1.1.1) 的弱解,则 u 也是(1.1.1)的古典解.

证 设 $u \in C^2(\Omega)$ 是(1.1.1) 的古典解,则对 $\forall v \in V$,用 v 乘(1.1.1)方程两边并取积分,于是有

$$-\iint_\Omega v\operatorname{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega fv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

也可写成

$$-\iint_\Omega (\operatorname{div}(pv\nabla u) - p\nabla v\ \nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega fv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用 Gauss 定理,得

$$\iint_\Omega p\nabla u\ \nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{\partial\Omega} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_\Omega fv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

注意到 $v \in V$,以及 u 满足(1.1.1)的边界条件,故得

$$B(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

即 u 也满足(1.1.7).

反之,设 $u \in C^2(\Omega)$ 且是(1.1.8) 的解,那么,由 $v|_{\Gamma_1} = 0$ 得

$$\begin{aligned}\iint_\Omega p\nabla u\ \nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_\Omega [\operatorname{div}(pv\nabla u) - v\operatorname{div}(p\nabla u)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\partial\Omega} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_\Omega v\operatorname{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Gamma_2} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_\Omega v\operatorname{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

代入(1.1.8)得

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_2} \sigma uv\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} pv\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_\Omega v\operatorname{div}(p\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =&\iint_\Omega fv\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} gv\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

故有

$$\iint_\Omega v[\operatorname{div}(p\nabla u) + f]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} v\left(g - p\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u\right)\mathrm{d}s = 0.$$

由 v 在 V 中的任意性,可得 u 为(1.1.1)的古典解. 证毕.

Galerkin 变分问题(1.1.8)解的存在性由 Lax-Milgram 定理保证.

定理 1.1(Lax-Milgram 定理) 设 V 是一个 Hilbert 空间, $B(u,v)$ 是 $V \times V$ 上的双线性泛函,且满足

对称性　$B(u,v)=B(v,u),\qquad \forall u,v\in V,\qquad (1.1.9)$

连续性　$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|,\qquad \forall u,v\in V,\qquad (1.1.10)$

强制性　$B(u,u)\geqslant\gamma\|u\|^2,\qquad \forall u\in V,\qquad (1.1.11)$

这里 M 和 γ 都是不依赖于 u、v 的正常数，$\|\cdot\|$ 为 V 中的范数，而 f 是 V 上的线性连续泛函. 那么 Galerkin 变分问题

求 $u\in V$，使得　$B(u,v)=f(v),\quad \forall v\in V\qquad (1.1.12)$

存在唯一的解 u^*，并且有以下估计式

$$\|u^*\|\leqslant\frac{1}{\gamma}\|f\|_*,$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 是 V 的对偶范数，即

$$\|f\|_*=\sup_{v\in V}\frac{\langle f,v\rangle}{\|v\|}.\tag{1.1.13}$$

证　由于 $B(u,v)$ 满足对称正定条件，故可以在 V 上定义新内积 $[u,v]=B(u,v)$. 并且有

$$\gamma\|v\|^2\leqslant[u,v]\leqslant M\|v\|^2.$$

即新内积的范数等价于 $\|\cdot\|$. 对于 V 的新范数 $f(\nu)$ 仍是线性有界泛函. 根据 Riesz 定理可知，存在唯一的元素 $u^*\in V$ 使得

$$[u^*,v]=f(v),\quad \forall v\in V.$$

即

$$B(u^*,v)=f(v),\quad \forall v\in V.$$

于是 u^* 就是所求的解. 另一方面

$$\gamma\|u^*\|^2\leqslant B(u^*,u^*)=[u^*,u^*]=f(u^*)\leqslant\|f\|_*\|u^*\|,$$

从而估计式(1.1.13)成立. 证毕.

作二次泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-f(v),\tag{1.1.14}$$

$J(v)$ 的极小值问题是：求 $u\in V$，使得

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v).\tag{1.1.15}$$

称(1.1.15)为(1.1.1)的 Ritz 变分问题.

定理 1.2　设 V 是 Hilbert 空间，$B(u,v)$ 是 $V\times V$ 上满足条件(1.1.9)～(1.1.11)的双线性泛函，f 是 V 上线性连续泛函，$J(v)$ 是(1.1.14)所定义的二次泛函. 那么(1.1.15)和(1.1.12)两个问题中

1) 任一个问题有解，则解不多于一个；

2) 任一个问题的解，必是另一个问题的解；

3) 如果 u^* 是它们的解，那么

$$J(v)-J(u^*)=\frac{1}{2}B(v-u^*,v-u^*),\quad \forall v\in V. \qquad (1.1.16)$$

证 首先证明(1.1.12)的解是唯一的. 设 u_1,u_2 为(1.1.12) 的解, 且 $w=u_1-u_2$. 由于

$$B(u_1,v)=f(v),\quad \forall v\in V,$$
$$B(u_2,v)=f(v),\quad \forall v\in V,$$

所以有

$$B(u_1-u_2,v)=0,\quad \forall v\in V.$$

也就是

$$B(w,v)=0,\qquad \forall v\in V.$$

令 $v=w$,则有 $B(w,w)=0$. 由 B 的正定性,可知 $w=0$,即 $u_1=u_2$.

其次证明(1.1.15) 的解也是(1.1.12) 的解. 设 u 为(1.1.15) 的解,并设 $v\in V$,且 λ 为任一实数,那么

$$J(u+\lambda v)=\frac{1}{2}B(u,u)+\lambda B(u,v)+\frac{1}{2}\lambda^2B(v,v)-f(u)-\lambda f(v)$$
$$\geqslant J(u)=\frac{1}{2}B(u,u)-f(u).$$

即

$$\frac{1}{2}\lambda^2B(v,v)+\lambda(B(u,v)-f(v))\geqslant 0.$$

由于 λ 的任意性,故一定成立

$$B(u,v)=f(v),\qquad \forall v\in V.$$

即 u 也是(1.1.12)的解.

最后证明(1.1.12)的解,也一定是(1.1.15)的解.

令 u 为(1.1.12)的解,那么

$$\begin{aligned}J(v)-J(u)&=J(u+(v-u))-J(u)\\&=\frac{1}{2}B(u,u)+\frac{1}{2}B(v-u,v-v)-f(u)\\&\quad+B(u,v-u)-f(v-u)-J(u).\end{aligned}$$

由于 $v-u\in V$ 及 u 为(1.1.12)的解,所以

$$B(u,v-u)-f(v-u)=0,$$

那么

$$J(v)-J(u)=\frac{1}{2}B(v-u,v-u).$$

根据 B 的正定性,得到

$$J(v) \geqslant J(u), \quad \forall\, v \in V.$$

即 u 也是(1.1.15)的解,而且它满足(1.1.16). 证毕.

在力学中, $J(u)$ 对应系统的总势能,故称它为能量泛函. Ritz 变分形式对应最小位能原理,而 Galerkin 变分形式对应虚功原理. 因此,定理 1.2 说明,在一定条件下,它们反应了同一个物理定律.

相当广泛的一类椭圆边值问题,都存在与之对应的对称、连续、强制的双线性泛函,使得边值问题的弱解对应一个 Hilbert 空间上的变分问题. 例如边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x^j}\right) + a(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u\mid_{\Gamma_1} = 0, \quad a^{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x^j}n_i\mid_{\Gamma_2} = g(x), & \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \end{cases} \tag{1.1.17}$$

其中 $\{n_i\}$ 是 Γ_2 上单位外法向量, $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_2), 0 \leqslant a \in L^\infty(\Omega)$, $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant N)$ 且存在 $\beta > 0$ 使得

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \beta \mid \xi \mid^2, \quad \xi \in R^N, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

这里上下指标相同表示求和. 以下均如此约定.

同样可以构造(1.1.17)相应的双线性泛函

$$B(u,v) = \int_\Omega \left(a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^i} + auv\right)\mathrm{d}x,$$

它在 V 上是对称、连续和强制的.

对于一般情形的 $2m$ 阶椭圆算子,在一定条件下,其相应的双线性泛函也是强制的. 这点可由 Gärding 不等式得到.

1.2　Galerkin 逼近解

考察一般线性椭圆边值变分问题. 设 $B(u,v)$ 是 Hilbert 空间 $V \times V \rightarrow R$ 的双线性泛函,它是对称、连续、强制的. Galerkin 变分问题是:求 $u \in V$, 使得

$$B(u,v) = f(v), \quad \forall\, v \in V, \tag{1.2.1}$$

其中 $f(v)$ 是 V 上线性连续泛函.

设 V_h 是 V 的有限维子空间,当 $h \rightarrow 0$ 时, V_h 的维数无限增加,且满足逼近性质. 那么,(1.2.1)的 Galerkin 逼近解 $u_h \in V_h$, 使得

$$B(u_h,v) = f(v), \quad \forall\, v \in V_h. \tag{1.2.2}$$

若 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 是 V_h 的基函数系,由于 $u_h \in V_h, v \in V_h$, 因此有

$$u_h = \sum_{i=1}^n a^i\varphi_i, \quad v = \sum_{i=1}^n b^i\varphi_i, \tag{1.2.3}$$

其中 $\{a^i\}, \{b^i\} \in R^n$. 将 u_h, v 代入(1.2.2)后,由于 $B(u,v)$ 是双线性的, $f(v)$