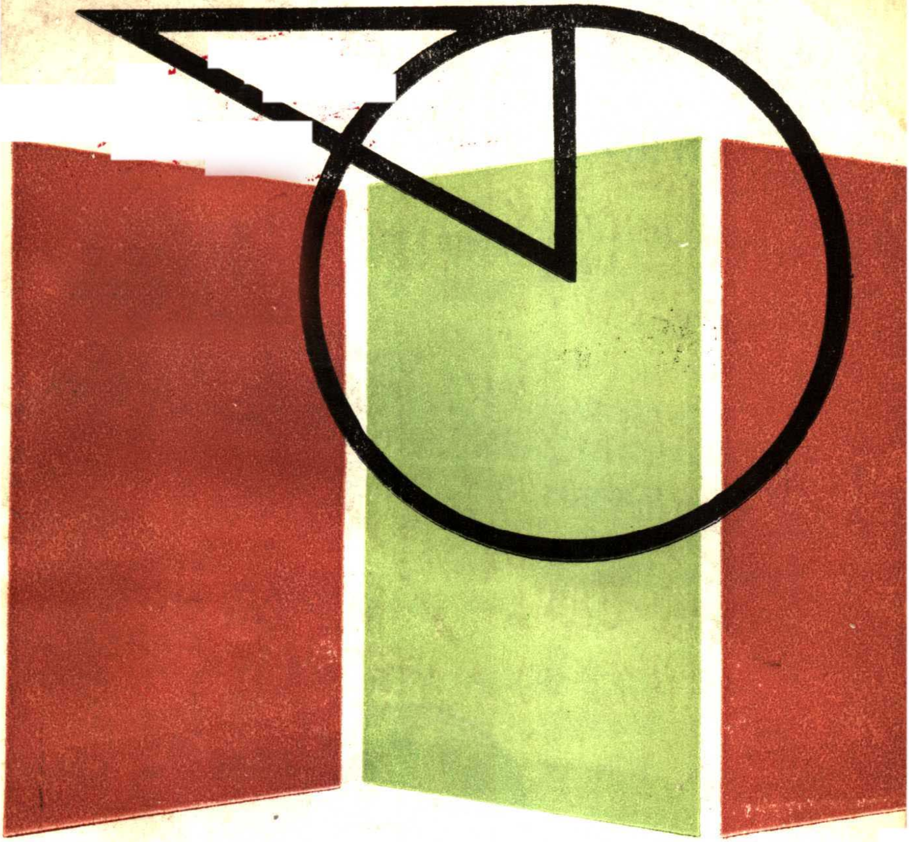
GAOZHONGSHUXUEXUANZETIJIJIEFA



高中数学选择题及解法

辽宁教育出版社

高中数学选择题及解法

石治源　王闽东
顾定玮　刘英贤　编

辽 宁 教 育 出 版 社
一 九 八 六 年·沈 阳

高中数学选择题及解法

石治源　王闽东
顾定玮　刘英贤　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）抚顺师范印刷厂印刷

字数：130,000　开本：787×1092 1/32 印张：5 7/8
印数：1—30,000
1986年3月第1版　1986年3月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　责任校对：李晓晶　理于
封面设计：曹太文　插　图：夏兰兰

统一书号：7371·158　定价：0.83元

目　　录

一 选择题简介

(一) 选择题的特点

选择题是目前国内外各种形式的考试、竞赛试题中经常采用的一种命题形式。它具有题型新颖，构思巧妙，涉及知识面广，要求准确度高，解法灵活性大等特点。经常进行解数学选择题的训练，有利于全面考查学生的基本知识、基本技能的掌握状况，培养学生自觉地、灵活地运用观察、验证、归纳、类比、直观、猜测、筛选、计算、推理等思维方法和手段，提高分析、判断的能力。也有助于发展学生思维的敏捷性、批判性、目的性和深刻性。对培养学生的创造性思维能力，具有独特的作用。

又由于选择题的选择支中，待选的答案常有四、五个之多，故与是非题相比较，可大大减少盲目地猜测中答的机会，因而，所反映的成绩较为客观。并且，选择题的评分过程简单，也便于作系统的试卷分析。

综上所述，选择题的确是值得提倡和广泛采用的一种好的命题形式。

(二) 选择题的形式

选择题是由一定的条件和若干个结论（即选择支）所组成。要求从所列的若干个结论中，挑选符合条件的结论作为正确的答案。其中有一个并且只有一个正确结论的选择题最为常见。

例1 数集$X=\{(2n+1)\pi,\ n\in Z\}$与数集$Y=\{(4n\pm1)\pi,\ n\in Z\}$，之间的关系（条件）是

（A）$X\subset Y$；（B）$X\supset Y$；（C）$X=Y$；（D）$X\neq Y$（结论）。

答案：（C）。

例2 互相不重合的三个平面把空间分成的部分数（条件）为

（A）4；（B）6；（C）8；（D）4,6,7,8（结论）。

答案：（D）。

例3 已知$0<a<1,b>1$，且$ab>1$，则$\log_a\frac{1}{b}$，$\log_a b$，$\log_b\frac{1}{b}$这三个数之间的大小顺序（条件）是

（A）$\log_a\frac{1}{b}<\log_a b<\log_b\frac{1}{b}$；（B）$\log_a b<\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}$；（C）$\log_a b<\log_a\frac{1}{b}<\log_b\frac{1}{b}$；（D）$\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}<\log_a b$（结论）。

答案：（B）。

例4 设$M=\{(x,\ y)\mid |xy|=1,\ x>0\}$，$N=\{x,\ y)\mid \mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}y=\pi\}$，将下列集合中满足条件(1) $M\cup N=$（　　）；(2) $M\cap N=$（　　）（条件）的填到括号内。

（A）$\{(x,y)\mid |xy|=1\}$；（B）$\{(x,\ y)\mid |xy|=1$，且x，y不同时为负数$\}$；（C）M；（D）N；（E）$\{(x,\ y)\ xy=-1,x>0\}$；（F）$\{(x,\ y)\mid xy=1\}$（结论）。

答案：（1）$M\cup N=$（C）；（2）$M\cap N=$（D）。

例5 （1）$f(-x)=-f(x)$（　　）；

(2) f $(-x)$ $=f(x)$ (   ); (3) $f(x+2\pi)$ $=f(x)$ (   ); (4) $f(x+1)=f(x)$ (   ); (5) $f(x+1)$ $=2f(x)$ (   ) (条件), 将下列函数中满足上述条件的填到括号内。

(A) $|x|+3$; (B) $tgx+ctgx$; (C) $2x$; (D) $3x^4$; (E) $sin2\pi x$; (F) $cos2\pi x+cos4\pi x$; (G) $-x^3$(结论)。

答案: (1) (B)、(C)、(E)、(G); (2) (A)、(D)、(F); (3) (B)、(E)、(F); (4) (E)、(F); (5) 没有。

例6 已知f (x) $=cos2x+sinx$. 则 (1) f (x) 是 (   ) 函数; (2) f (x) 的值域为 (   ) (条件). 分别从 (A)、(B)、(C) 及 (D)、(E)、(F)中选择并填入 (1) 与 (2) 的括号内。

(A) 奇函数; (B) 偶函数; (C) 既不是奇函数也不是偶函数; (D) $(-\infty, \frac{9}{8}]$; (E) $[-2, \frac{9}{8}]$; (F) $[0, \frac{9}{8}]$ (结论)。

答案: (1) (C); (2) (E)。

例7 已知a、b为实数, $a^2+b^2=0$是a、b同时为零的(条件)

(A) 充分条件; (B) 必要但不充分条件; (C)必要条件; (D)充分但不是必要条件; (E)充要条件. 请把正确答案填入方括号内, 将最佳正确答案填入圆括号内 (结论)。

答案: [(A)、(C)、(E)], (E)。

(三) 选择题的类型

从选择题的形式看, 可分成发散型和平行型两类。

发散型 由一个条件与多个结论（选择文）组成。

平行型 由多个条件与多个结论组成。

从选择题的性质看，又可分为定性型、定量型和混合型三类。

定性型 由条件判定所述数学元素可具有的性质或关系的结论。

定量型 由条件通过计算判定所述数学元素的数量的结论。

混合型 由条件判定所述数学元素的性质及数量两方面的结论。

从选择题的正确答案的要求看，又可分为正误型和比较型两类。

正误型 若选择题所列结论中，只要求选择正确的答案（一个或多个）。

比较型 若选择题所列结论中，既要求选择几个正确答案，又要求从正确答案中，选出最佳的一个正确答案。

例1、例3与例7均属定性发散型，例5属于定性平行型，例2属于定量发散型，例4属于定量平行型，例6属于混合平行型。前面的7个例子中，除例7属于比较型选择题外，其余6个均属于正误型选择题。

一般地，定量或定性发散正误型选择题最为常见。

二 选择题的解法

对于解数学选择题，如果不得其法，乱猜乱碰，或者总是与常规题一样逐一求解，其结果不是选择的准确性低劣，就是增加了选择的难度，而浪费很多的时间。由于解选择题时，不要求写出解答过程，而且题目本身又为正确选择答案提供了"暗示"，因此，解这种类型题时，学生的思维活动受到的束缚较少，解题的方法又较其他形式的题目为多。一般地可有按常规题解得结果与选择支的答案进行比较、判断的直接解法和利用选择题一般有一个并且只有一个正确的结论的特点，通过排除较易判定的错误答案，以缩小选择的范围的筛选法等解法，现仅就以最常见的发散正误型选择题的解法举例说明如下。

（一）直接解法

1. 直接指出正确结论法

上一节的例1，$\because 4n\pm1$就是被4除余数为1或3的奇数，$\therefore$可直接指出结论（C）是正确答案。

上一节的例2，根据题设条件，稍经全面考虑，就可直接指出结论（D）是正确的答案。

上一节的例4，只要将数集M和N表示的点集（曲线）画出后，即可直接指出结论（C）和（D）分别是（1）和（2）的正确答案。

例8 下列映射中，（　　）是一一映射。

（A）$Q\to R$，$y=2x$（其中，Q是原象集，R为象集，$y=2x$为对应法则，其他也如此）；（B）$Q\to Q$，$y=3x$；（C）$R\to\bar{R}^{+}$，$y=x^2$；（D）$[0^\circ, 180^\circ]\to[0, 1]$，$y=\sin x$。

此例只要根据一一映射的定义，就可直接指出结论（B）是正确的答案。

例9 两直线l和m是以直线$y=x$为对称轴的对称图形，若l的方程是$y=ax+b$（$a\neq 0$），那么，直线m的方程是

（A）$x=\dfrac{y}{a}+b$；　　（B）$x=ay+b$；

（C）$y=-\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}$；　　（D）$y=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{a}$。

此例，根据$y=f(x)$和$x=f(y)$的图象关于直线$y=x$为轴对称图形，即可直接指出结论（B）是正确的答案。

例10 $x\neq\dfrac{\pi}{3}$是$\sin x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的（　　）条件。

（A）充分；（B）必要；（C）充要；（D）既不充分又不必要。

此例根据定义，即可直接指出结论（B）是正确的答案。

例11 圆内接四边形边长依次是25、39、52和60，则这个圆的直径是

（A）62；（B）63；（C）65；（D）66；（E）69。

（如图1所示）

此例如果根据所给条件，利用余弦定理通过计算可得其解答但过程繁杂。最好是直接根据25、60、65和39、52、

65是两组勾股数，即可判断，并且直接指出结论（C）是正确的答案。

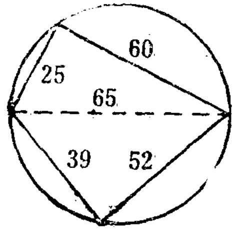


图 1

前面的例7，因为$a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0$，且$b=0$。所以，可直接判断，并且指出（A）、（C）和（E）均为正确的答案，其中，（E）是最佳的答案。

2、直接求解对照法

对某些选择题，需根据所给条件，经过推理或计算画图求得一个结论，再与供选择的若干结论对照比较，从而确定正确的答案。

例12 若A是B的必要条件，B是C的充要条件，D是C的充分条件，则D是A的（ ）条件。

（A）必要；（B）充分；（C）充要；（D）既非充分又非必要。

解 $\because A \Leftarrow B \Longleftrightarrow C \Leftarrow D$，$\therefore A \Leftarrow D$，

$\therefore$结论（B）是正确的答案。

例13 $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$等于

（A）$-\frac{4}{5}$；（B）$\frac{4}{5}$；（C）$\frac{3}{5}$；（D）$-\frac{3}{5}$。

解 $\because \cos\left[\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=\cos\left(-\arcsin\frac{4}{5}\right)$

$=\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$。

$\therefore$结论（C）是正确的答案。

例14 如果n是正整数，则$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$的值。

（A）一定是零；（B）一定是偶数；（C）是整数，但不一定是偶数；（D）不一定是整数。

解 ∵①当$n=2k$（$k\in Z$）时，$\frac{1}{8}[1-(-1)^n]$

$$(n^2-1)=0;$$

②当$n=2k-1$时，$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$

$$=\frac{1}{8}\cdot 2\cdot 4k(k-1)=k(k-1).$$

∴$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$一定是偶数，

∴结论（B）是正确的答案。

前面的例1也可由①当$n=2k$（$k\in Z$）时，$(2n+1)\pi=(4k+1)\pi$；②当$n=2k-1$时，$(2n+1)\pi=(4\pi-1)\pi$，得知结论（C）是正确的答案。

例15 已知x_1、x_2是方程$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$（$k\in R$）的两个不同的实数根，则$x_1{}^2+x^2{}_2$的最大值是

（A）19；（B）18；（C）$5\frac{5}{9}$；（D）不存在。

解 ∵一元二次方程有两不等的实数根，

∴$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)>0$，即$k>-4$，

及$k<-\frac{4}{3}$，又∵$x^2{}_1+x^2{}_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-(k+5)^2+19$，

∴$x^2{}_1+x_2{}^2$无最大值，∴结论（D）是正确的答案。

〔注〕此例若不先由$\Delta>0$，确定k的取值范围，就很容易由$x_1^2+x_2^2=-(k+5)^2+19$，而受到选择支（A）的诱惑，作出错误的判断，错误地选择（A）了。

例16　比$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$大的最小整数是

（A）972；（B）971；（C）970；（D）969。

解　$\because (\sqrt{3}+\sqrt{2})^6=(\sqrt{3})^6+C_6^1(\sqrt{3})^5\sqrt{2}$

$$+C_6^2(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^2+C_6^3(\sqrt{3})^3(\sqrt{2})^3$$

$$+C_6^4(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^4+C_6^1(\sqrt{3})(\sqrt{2})^5$$

$$+(\sqrt{2})^6=485+198\sqrt{6}\approx 969.998,$$

$\therefore$比$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$大的最小整数是970，结论（C）就是正确的答案。

例17　对于任何$\phi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，都有

（A）$\sin(\sin\phi)<\cos\phi<\cos(\cos\phi)$；（B）$\cos(\cos\phi)<\cos\phi<\sin(\sin\phi)$；（C）$(\cos)\sin\phi<\cos\phi<\sin(\cos\phi)$；（D）$\sin(\cos\phi)<\cos\phi<\cos(\sin\phi)$。

解　$\because$当$\phi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，有$\sin\phi<\phi$*，

又$\because$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内$\cos x$是减函数，$\therefore \cos(\sin\phi)>\cos\phi$……(1)。又$\because \cos\phi\in(0,1)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore$ 有$\sin(\cos\phi)<\cos\phi$（应用*）…(2)。由(1)及(2)，得$\sin(\cos\phi)<\cos\phi<\cos(\sin\phi)$。所以，结论（D）是正确

的答案。

例18 $\frac{x}{6\pi}=\sin x$实数解的个数是

（A）8；（B）9；（C）10；（D）11；

（E）12。

解 $\because \frac{x}{6\pi}=\sin x \Longleftrightarrow x=6\pi\sin x$，

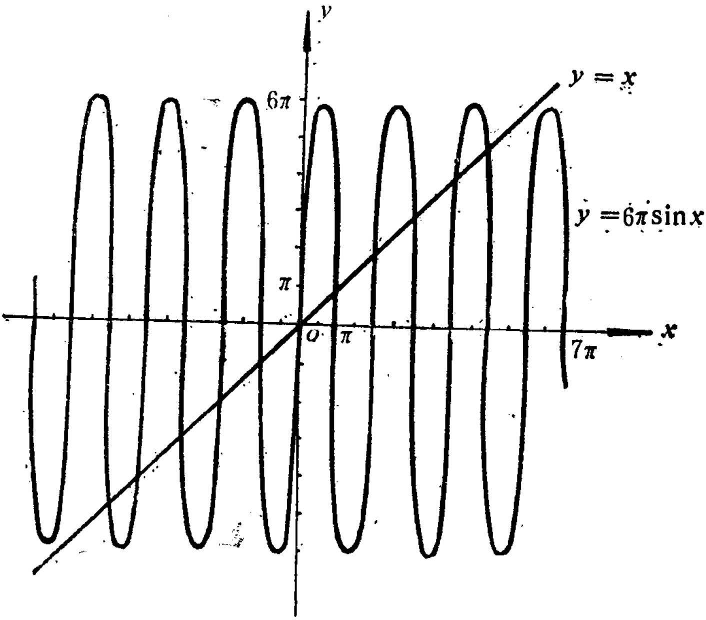


图 2

$\therefore$只要作出函数$y=6\pi\sin x$和$y=x$的图象（如图2），那么，两函数交点的个数，就是原方程的实数解的个数。

$\because$两函数的交点有11个，$\therefore \frac{x}{6\pi}=\sin x$的实数解的个数为11。所以结论（D）是正确的答案。

〔注〕此例利用图象法就能迅速地将正确的答案选出。如果利用其他方法，将是十分困难的。

3．特殊值代入判断法

有些选择题，可用适合所给条件的特殊值代入的方法，判断选择支中的某一个结论是正确的（这里借助于选择支中正确结论是"唯一存在"的）。

例19 $2^{-(2k+1)}-2^{-(2k-1)}+2^{-2K}$ $(k\in Z)$ 等于

（A）2^{-2k}；（B）$2^{-(2k-1)}$；（C）$-2^{-(2k+1)}$；（D）0。

解 ∵取$k=1$时，原式$=2^{-3}-2^{-1}+2^{-2}=-\frac{1}{8}$

$$=-2^{-3}.$$

∴原式应为$-2^{-(2K+1)}$，∴结论（C）是正确的答案。

〔注〕此例利用此法较简捷、迅速、准确。

例20 若实数x满足方程$|1-x|=1+|x|$，那么，$\sqrt{(x-1)^2}$等于

（A）$x-1$；（B）$1-x$；（C）$\pm(x-1)$；（D）1。

解 由观察易知：$x=-1$是方程的一个解，代入可得$\sqrt{(x-1)^2}=2$，而$1-x=1-(-1)=2$，

∴应有$\sqrt{(x-1)^2}=1-x$。∴结论（B）是正确的答案。

〔注〕此例如果通过解含绝对值的方程后，再求$\sqrt{(x-1)^2}$的值就太浪费时间了。

例21 若$a<b<c$，$x<y<z$，则下列代数式中最大的一个是

（A）$ax+by+cz$；（B）$ax+cy+bz$；（C）$bx+ay+cz$；（D）$bx+cy+az$。

解 ∵取$a=-1$，$b=0$，$c=1$，$x=-1$，$y=0$，$z=1$时，则$ax+by+cz=1+1=2$，$ax+cy+bz=1$，$bx+ay+cz$

$=1$，$bx+cy+az=-1$，∴结论（A）为正确的答案。

例22　若$a\geqslant 1$，则方程$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$的实数根的和等于

（A）$\sqrt{a}-1$；（B）$\frac{\sqrt{a}-1}{2}$；（C）$\sqrt{a-1}$；

（D）$\frac{\sqrt{a-1}}{2}$；（E）$\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$。

解　∵取$a=2$时，原方程为$\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x$，两次平方后可得方程$x^4-4x^2-x+2=0$，即

$$(x-2)(x+1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=0,$$

∴$x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$x_4=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。但

∵x_1、x_2及x_3均为增根，∴方程只有一个实数根$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

又∵（E）$\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}=\frac{\sqrt{4\cdot 2-3}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴结论（E）是正确的答案。

〔注〕此例如果采用直接解法将是很困难的。

例23　设二次方程$x^2+2px+2q=0$有实数根，其中p、q都是奇数，那么，它的根一定是

（A）奇数；（B）偶数；（C）分数；（D）无理数。

解　∵取满足条件的特殊值$p=3$，$q=1$，则方程为

$x^2+6x+2=0$，∴$x=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{2}=-3\pm\sqrt{7}$，即实根都是无理数。∴结论（D）是正确的结论。

前面的例3，也可利用此法。可取适合所给条件的特殊