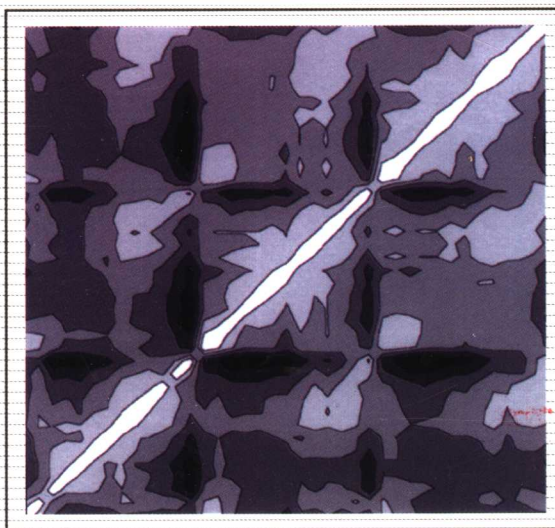


—— 研究生系列规划教材 ——

非平稳信号分析导论

An Introduction To Nonstationary Signal Analysis

刘本永 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

电子科技大学研究生系列教材建设项目

非平稳信号分析导论

刘本永 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

非平稳信号分析导论 / 刘本永编著. —北京: 国防工业出版社, 2006. 2

研究生系列规划教材

ISBN 7-118-04324-9

I. 非... II. 刘... III. 随机信号—信号分析—研究生—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 161046 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 11¼ 206 千字

2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月北京第 1 次印刷

印数: 1—4000 册 定价: 18.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 68428422

发行邮购: (010) 68414474

发行传真: (010) 68411535

发行业务: (010) 68472764

序 言

从 20 世纪 80 年代历时至今的二十多年来,信息电子科学技术的发展令人瞩目。以无线通信和互联网技术为代表的现代信息电子科技极大地促进了经济、社会的发展,并深刻地改变了人类生活。如今,信息电子技术不仅自身已蓬勃发展为强大的新兴产业,它对各传统产业在技术进步上的促进也是有目共睹的。而在国防建设和军事技术的发展中,信息电子技术的重要性更为突出,因为现代化战争最关键的环节就是信息的获取、控制与对抗等电子技术的较量。

正因为迅猛发展的信息电子技术对当今社会发展具有如此重要的意义,因此,国内各高校都极其重视信息电子类相关学科的发展、相关专业的成长和相关专业教学水平的提高。而在这一巨大的努力和付出中,研究生教育质量的提升和研究生教材建设则是至关重要的一环。

电子科技大学正是基于上述认识,近年来加大了电子信息类教材建设的力度。我校的学科专业涵盖了从电子材料、电子器件、电路、信号、控制直到各种电子系统的较为完整的电子信息领域,学校极为重视国内外研究生课程的设置和教材内容的比较研究,并建立了专项基金,用于资助具有一定学术水平的研究生教材的编写与出版。

当然,教材建设也是一项学术性很强的工作。研究生教材既要体现理论上的基础性和系统性,又要尽可能地反映本领域研究的最新成果和进展,要求较高。另一方面,高校的骨干师资力量大多既要承担繁重的科研工作,又要承担大量的教学任务,加之各位教授的专业背景不同,教材的最终质量和使用效果仍需通过实践去检验。因此,我们诚恳希望使用这些教材的各个院校的广大师生直言批评、不吝指正,使我校的教材建设能够越做越好。

电子科技大学
二〇〇五年十月十九日

前 言

非平稳信号分析与处理是现代信号处理的一个重要研究内容和发展方向,在通信、雷达、信息对抗、自动控制、模式识别、水声、机械振动、地震勘测和生物医学工程等领域有广泛应用。其研究对象主要是非平稳信号,通过分析信号的时变特征,构造合适的时频分布并进行恰当处理,达到不同的信号处理目的。因此,找到合适的、性能优良的时频分布成为非平稳信号分析与处理的一个重要研究内容——时频分析,它是非平稳信号分析的解析理论。首先,由短时傅里叶变换建立起来的频谱图是最简单、最直观的一种时频分布,它的典型应用表现在信号过滤和时变干扰剔除等方面。其次,分数傅里叶变换作为傅里叶变换的直接推广,并作为一种特殊的时频分布,对分析目前使用较广泛的线性调频信号是十分有效的。另外,Wigner分布作为一种具有优良性能的时频分布,通过它可以准确估计信号的瞬时频率、瞬时带宽等时频参数。而由 L. Cohen 在总结多种时频分布的基础上提出的广义双线性时频分布(简称 Cohen 类时频分布),将各种时频分布纳入统一的框架内,同时又可以派生出具有有所希望的性质的多种具体的时频分布。最后,小波变换作为一种特殊的时频分布,它通过对信号进行多分辨分析,得到不同尺度(对应于不同分辨力或频率)的整体特征和细节信息,在图像压缩、突变检测等领域得到广泛应用。

除了上述解析理论以外,非平稳信号分析与处理还包括时变谱估计和时变滤波等重要内容,如参数模型法时变谱估计、进化谱分析等,它们是平稳信号谱估计技术和最优过滤技术在非平稳信号处理中的延伸和发展。此外,非平稳信号分析与处理还包括一些重要专题,如特殊非平稳信号的平稳化处理、循环平稳信号分析与处理等。

本书是非平稳信号分析与处理的导论性著作,重点讨论非平稳信号分析的解析理论,全书共分 7 章。

第 1 章介绍信号的时域与频域分析,内容包括信号的时域表征参数(如波形中心和有效时宽)和频域表征参数(如中心频率和有效带宽)、信号的带宽方程和时宽方程、信号的相位和解析信号等。

第 2 章讨论非平稳信号时频分布的基本要求,内容包括边缘分布及整体平

均和局部平均的要求、平移性和尺度变换性等性质要求,以及信号不确定性原理的要求等。

第3章讨论短时傅里叶变换和频谱图,包括连续信号短时傅里叶变换及其性质、序列短时傅里叶变换及计算、短时傅里叶变换的应用等。

第4章结合傅里叶变换和离散傅里叶变换的特点,讨论连续分数傅里叶变换及其性质、离散分数傅里叶变换及其计算以及分数傅里叶变换的应用等问题。

第5章在介绍 Gabor 展开的基础上,介绍框架理论及其在计算 Gabor 变换中的应用、离散 Gabor 变换及其应用等。

第6章讨论 Wigner 分布,内容包括连续 Wigner 分布及其性质、序列的离散 Wigner 分布及其计算、广义双线性时频分布和指数分布以及 Wigner 分布的应用等。

第7章在讨论连续小波变换及其性质的基础上,重点讨论多分辨分析理论及其在二进正交小波分解和重构中的应用——Mallat 算法,并介绍 Daubechies 小波的构造及其在突变检测中的应用,最后介绍小波分析在模式特征提取中的最新应用。

上述解析理论是时变谱估计、时变滤波和非平稳信号处理专题的理论基础,并已作为七届研究生相关课程的主要教学内容,所以本书可以作为通信、雷达、信息对抗、自动控制和信号处理等专业的大学高年级本科生、研究生的教材,也可以作为相关领域的科研、工程技术人员的参考资料。

非平稳信号分析与处理是现代信号与信息处理领域中最为活跃、发展最为迅速的方向之一,本书主要取材于相关专著和期刊的最新文献。作者和研究生在教学及相关科研中对其中大部分内容已进行过反复推敲,但由于作者在该方向涉足不深,加之时间仓促,所以难免有错漏之处;衷心希望得到读者的批评指正。

本书得到了“电子科技大学研究生教材建设基金”的资助,并在出版过程中得到国防工业出版社孙严冰编辑的大力支持和帮助,研究生孟庆宇、王睿等参与了其中第4章和第7章的实验工作,在此一并表示感谢。另外,还要感谢我的夫人张晶女士,她所关心的柴米油盐等虽然与本书内容无关,但却为本书的撰写、录入和编排赢得了许多宝贵的时间。

作 者

2005 年 9 月于成都

目 录

第 1 章 信号的时域与频域分析	1
1.1 信号的基本特征	1
1.1.1 时域波形特征	2
1.1.2 频域谱特征	3
1.2 信号的带宽方程	6
1.2.1 频率算子和信号频谱特征的波形域算法	6
1.2.2 时间算子和信号波形特征的频域算法	8
1.2.3 信号的带宽方程	9
1.2.4 信号的时宽方程	12
1.3 信号的相位和解析信号	13
1.3.1 解析信号	13
1.3.2 正交模型信号	17
第 2 章 时频分布的基本要求	20
2.1 真边缘、整体平均与局部平均	20
2.1.1 真边缘与总能量	20
2.1.2 整体平均与局部平均	21
2.1.3 时频分布的特征函数	23
2.2 时频分布的基本性质	24
2.2.1 平移不变性	24
2.2.2 线性尺度变换	25
2.2.3 有限支撑性	26
2.3 信号的不确定原理	26
2.3.1 不确定原理的基本含义	27
2.3.2 不确定原理的形式	27
2.3.3 信号不确定原理的证明	29
2.3.4 具有最小时宽带宽积的信号	30
2.3.5 不确定原理对时频联合分布的约束	31

第3章 短时傅里叶变换与频谱图	33
3.1 连续信号的短时傅里叶变换与频谱图	33
3.1.1 短时傅里叶变换与频谱图的定义	33
3.1.2 短时傅里叶变换与频谱图的性质	35
3.1.3 短时傅里叶变换的物理意义	36
3.1.4 整体平均与局部平均	37
3.2 序列的短时傅里叶变换	45
3.2.1 序列短时傅里叶变换的定义	45
3.2.2 离散短时傅里叶变换	46
3.2.3 离散短时傅里叶变换的计算	48
3.3 短时傅里叶变换的应用	51
3.3.1 基于短时傅里叶变换的多普勒谱分析	52
3.3.2 干扰消除	54
第4章 分数傅里叶变换	59
4.1 连续分数傅里叶变换	59
4.1.1 连续分数傅里叶变换的定义	59
4.1.2 连续分数傅里叶变换的性质	62
4.1.3 连续分数傅里叶变换的一种快速算法	63
4.2 离散分数傅里叶变换(DFrFT)	65
4.2.1 离散分数傅里叶变换的定义	65
4.2.2 DFrFT 的计算	69
4.3 分数傅里叶变换的应用	76
4.3.1 波束形成	76
4.3.2 手写数字特征提取与分类	79
第5章 Gabor 展开与框架理论	82
5.1 连续 Gabor 展开	82
5.1.1 由复谱图重构信号:Gabor 时频网格	82
5.1.2 连续 Gabor 展开	83
5.2 框架理论	85
5.2.1 线性空间、线性算子和 Hilbert 空间	86
5.2.2 框架理论简介	87
5.2.3 Zak 变换	89
5.2.4 计算 Gabor 变换的框架方法	90
5.3 离散 Gabor 展开	95

5.3.1	周期序列的离散 Gabor 展开	95
5.3.2	非周期长序列的离散 Gabor 展开	98
5.4	Gabor 展开的应用——自适应回音对消问题	100
5.4.1	回音和回音对消模型	100
5.4.2	常规自适应回音对消算法	101
5.4.3	基于 Gabor 展开的回音对消算法	103
第 6 章	Wigner 分布	106
6.1	连续 Wigner 分布	106
6.1.1	连续 Wigner 分布的定义	106
6.1.2	连续 Wigner 分布的性质	108
6.1.3	计算例	112
6.1.4	Wigner 分布与其他时频分布的关系	114
6.1.5	Wigner 分布与模糊函数的关系	115
6.1.6	伪 Wigner 分布	117
6.2	离散 Wigner 分布	118
6.2.1	序列的 Wigner 分布	118
6.2.2	序列的离散 Wigner 分布及其计算	120
6.3	时频分布的统一表示——广义双线性时频分布	122
6.3.1	广义双线性时频分布的一般形式	123
6.3.2	指数分布	126
6.4	Wigner 分布的应用——谐振区目标特征提取问题	127
6.4.1	谐振区目标特征提取问题	127
6.4.2	Wigner 分布在谐振区目标特征提取中的应用	128
第 7 章	小波分析基础	135
7.1	连续小波变换	135
7.1.1	连续小波变换的定义	135
7.1.2	小波变换的时频分辨特性	138
7.1.3	小波变换的性质	140
7.1.4	几种常见母小波	141
7.2	离散小波变换(DWT)	144
7.2.1	离散小波变换	144
7.2.2	正交小波变换	145
7.3	多分辨分析与 Mallat 算法	146
7.3.1	多分辨分析	147

7.3.2 二进正交小波的构造条件	151
7.3.3 二进正交小波的构造	153
7.3.4 Daubechies 小波的构造	154
7.3.5 小波分解与重构的快速算法——Mallat 算法	158
7.4 小波分析的应用	160
7.4.1 在信号突变检测中的应用	160
7.4.2 在模式特征提取中的应用	163
附录 主要符号一览表	168
参考文献	170

第 1 章 信号的时域与频域分析

信号分析是对信号基本性质的研究和表征。信号通常是一个多变量函数,如电场强度是时间和空间的变量。在信号分析研究中主要强调随时间的变化,但主要思想和研究成果很容易扩展到空间或其他变量。

为深入、全面了解信号的基本性质,需要将信号表示为不同的形式。在数学上,最基本的表示方法是用完备的函数集来展开信号。函数集的选取是由信号的特性或实际需要决定的,目的在于更好地理解信号的基本性质。选取简单的三角函数集(复指数函数集)展开信号,是最简单也是最重要的一种信号表示方式,即信号的傅里叶展开,它将信号表示为具有不同频率的正弦信号的和的形式。傅里叶展开是 19 世纪初的一个杰出思想,它与其后半个世纪发现的频谱分析是思想与手段的统一。

作为铺垫,本章讨论信号的时域与频域分析,其中重点讨论信号波形参数和频谱参数估计的基本方法,并在此基础上讨论信号的带宽方程和时宽方程。

1.1 信号的基本特征

在强调物理量随时间变化的性质时,信号表现为时间域的一个波形。如电压或电流随时间的变化,即电信号。本书用 $s(t)$ 表示一个信号在波形域的形式。

一个最简单的信号是正弦信号,它是 Maxell 方程的一般解——单色波,具有恒定的幅度 A 和固定的频率 ω_0 ,即

$$s(t) = A \cos \omega_0 t \quad (1.1)$$

频率的物理意义是,单位时间内物理量(如电压、电场强度)的振荡次数或起伏次数。

自然界中绝大多数信号不具有上述简单形式,但人们希望将上述形式推广,用以表示一般信号,这时

$$s(t) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (1.2)$$

其中的幅度 $A(t)$ 和相位 $\varphi(t)$ 是时间的函数, 分别称为幅度调制和相位调制。

更一般的推广是采用复数形式表示信号, 即

$$s(t) = A(t) \exp[j\varphi(t)] \quad (1.3)$$

而实信号看做是上述复信号的实部, 但是两种形式的幅度和相位并不相同。

通常我们只能得到一个信号 $s(t)$ 本身, 并不知道其幅度和相位的具体变化形式, 而自然现象中可以有无限多种机理产生这一信号。换句话说, 可以有无限多种形式的幅度和相位产生我们得到的信号 $s(t)$ 。所以, 如何定义 $s(t)$ 的幅度和相位成为理论研究和实际应用中需要解决的一个问题。本节主要讨论如何估计给定信号 $s(t)$ 的时域、频域基本特征, 包括能量特征、波形中心、均方持续、时宽等波形特征和中心频率、带宽等谱特征。至于如何由给定信号 $s(t)$ 定义幅度、相位等, 相关内容安排在 1.3 节讨论。

1.1.1 时域波形特征

对于给定信号 $s(t)$, 其时域波形的基本特征常用信号能量、波形中心、均方持续、时宽等描述。

1. 信号能量

在电路中, 能量正比于电压或电流的平方。对声波而言, 能量正比于压力的平方。一般而言, 信号的能量特征可以用能量密度 (即瞬时功率) $|s(t)|^2$ 来表征, 它表示在 t 时刻每单位时间内信号的能量或强度。对应地, $|s(t)|^2 \Delta t$ 表示在 t 时刻 Δt 时间内信号的部分能量, 而信号的总能量定义为^①

$$E = \int |s(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

对能量有限信号而言, 不失一般性, 取总能量为 1, 称为能量归一化信号。

2. 任意时间函数的平均

对于给定信号 $s(t)$ 和任意时间函数 $g(t)$, 该函数的一般平均定义为

$$\langle g(t) \rangle \equiv \frac{1}{E} \int g(t) |s(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

显然, 对于能量归一化信号

$$\langle g(t) \rangle \equiv \int g(t) |s(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

^① 本书所涉及的积分, 凡是未给出积分限的, 都默认为从负无穷到正无穷 ($-\infty \sim +\infty$)。

信号的波形中心、均方持续、时宽等波形特征是上述定义的特殊形式。本节在以下的讨论中,假定信号是能量归一化的。

3. 波形中心

波形中心即信号的平均时间,即一般定义中取 $g(t) = t$ 的情形,即

$$\langle t \rangle = \int t |s(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

它给出信号能量密度的大致特征,或信号能量集中的大致时刻。

4. 均方持续

在一般定义式(1.6)中取 $g(t) = t^2$,得到信号的均方持续为

$$\langle t^2 \rangle = \int t^2 |s(t)|^2 dt \quad (1.8)$$

5. 时宽

时宽即信号的标准偏差。在一般定义式(1.6)中取 $g(t) = (t - \langle t \rangle)^2$,得到时宽的定义:

$$\sigma_t = [\int (t - \langle t \rangle)^2 |s(t)|^2 dt]^{1/2} \quad (1.9)$$

表示信号持续于 $2\sigma_t$ 的时间范围内,超过这一范围,信号大部分会消失。显然,时宽与波形中心、均方持续之间有如下关系:

$$\sigma_t^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 \quad (1.10)$$

1.1.2 频域谱特征

既然自然界可以有多种机理产生具有同样波形的信号,所以在信号分析中了解信号源的物理状况和物理机制通常是必要的,其中频谱分析是最有力的工具之一。另外,波通过媒质传播的特性与频率有关,如光能穿过玻璃而不能穿过铝片、X射线能穿过铝片而不能穿过玻璃,根本原因就是频率的差别。所以,基于傅里叶变换的信号频率域分析,是信号分析的一个基本工具。

对能量有限信号 $s(t)$,可以用正交函数系 $\{\exp(j\omega t)/\sqrt{2\pi}\}_{\omega=-\infty}^{\infty}$ 来表示它,即

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.11)$$

这就是傅里叶展开,展开系数

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \langle s(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(j\omega t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t) \exp(-j\omega t) dt \\
 &= F[s(t)]
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

即信号 $s(t)$ 的傅里叶变换。其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为能量有限信号空间 H 上定义的内积, 即对于 H 上任意两信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$, 它们的内积为

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = \int s_1(t) s_2^*(t) dt \tag{1.13}$$

其中“*”表示复共轭。

对于给定信号 $s(t)$, 由式(1.12)定义的傅里叶变换是唯一的和确定的, 它可以用中心频率、带宽等参量来表征。

1. 能量谱密度

能量谱密度 $|S(\omega)|^2$ 表示在频点 ω 处单位频带内信号的能量或强度, 它表明在信号总的持续时间内存在哪些频率成分, 各成分的相对比例如何。值得注意的是, 无法从能量谱密度得知信号各频率成分什么时候出现。

对应地, $|S(\omega)|^2 \Delta\omega$ 表示在频点 ω 处 $\Delta\omega$ 频带内信号的部分能量, 而信号的总能量为

$$E = \int |S(\omega)|^2 d\omega \tag{1.14}$$

且满足 Parseval 定理

$$E = \int |s(t)|^2 dt = \int |S(\omega)|^2 d\omega \tag{1.15}$$

即信号总能量与其计算方法无关。

2. 频率函数的平均

信号的频谱特征常用中心频率、带宽等参量表征, 这些参量由频率函数 $g(\omega)$ 的下列一般平均来定义

$$\langle g(\omega) \rangle \equiv \frac{1}{E} \int g(\omega) |S(\omega)|^2 d\omega \tag{1.16}$$

对于能量归一化信号

$$\langle g(\omega) \rangle \equiv \int g(\omega) |S(\omega)|^2 d\omega \tag{1.17}$$

以下的定义中, 假定信号是能量归一的。

3. 中心频率

中心频率(频谱中心/平均频率)即一般平均定义中 $g(\omega) = \omega$ 的情形

$$\langle \omega \rangle = \int \omega |S(\omega)|^2 d\omega \quad (1.18)$$

它给出信号能量谱密度的大致特征,或信号能量集中的大致频点。

4. 带宽

在一般定义式(1.17)中取 $g(\omega) = (\omega - \langle \omega \rangle)^2$, 得到信号带宽的定义如下:

$$\sigma_\omega = [\int (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |S(\omega)|^2 d\omega]^{1/2} \quad (1.19)$$

它表示信号持续于 $2\sigma_\omega$ 的频带内。显然,带宽与中心频率之间有如下关系:

$$\sigma_\omega^2 = \langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2 \quad (1.20)$$

【例 1.1】 具有矩形幅度的复信号

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{1/(t_2 - t_1)} \exp[j\varphi(t)], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

平均时间:

$$\langle t \rangle = (t_1 + t_2)/2$$

均方持续:

$$\langle t^2 \rangle = (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)/3$$

时宽:

$$\sigma_t = (t_2 - t_1)/(2\sqrt{3})$$

显然,该信号时宽 $2\sigma_t$ 接近真实的持续时间 $(t_2 - t_1)$ 。

【例 1.2】 具有高斯包络的复信号

$$s(t) = A \exp[-\alpha(t - t_0)^2/2 + j\omega_0 t]$$

能量归一化幅度:

$$A = (\alpha/\pi)^{1/4}$$

信号的傅里叶变换结果:

$$S(\omega) = (1/\pi\alpha)^{1/4} \exp[-(\omega - \omega_0)^2/2\alpha - j(\omega - \omega_0)t_0]$$

平均时间:

$$\langle t \rangle = t_0$$

时宽:

$$\sigma_t = 1/\sqrt{2\alpha}$$

中心频率:

$$\langle \omega \rangle = \omega_0$$

显然,该信号的波形中心在 t_0 处,而且主要持续于 $(t_0 - \sqrt{1/2\alpha}, t_0 + \sqrt{1/2\alpha})$ 的时间范围内,在此范围以外的信号占小部分(约为 33.3%);频谱的分布类似。

1.2 信号的带宽方程

对于一个给定的信号,虽然它的产生机理可以是多样的,但其时宽和带宽是确定的。反过来,可以采用多种方式得到某一确定时宽或带宽的信号,最基本的方式是调幅和调频,它们对带宽的贡献满足带宽方程,而对时宽的贡献满足时宽方程。本节重点讨论带宽方程,它们涉及波形参量和频谱参量的互换域计算^[1],所以先就相关算法作简单介绍。

1.2.1 频率算子和信号频谱特征的波形域算法

对能量归一化信号 $s(t)$,其频谱特征(中心频率、带宽等)可以直接由波形求得。为便于讨论,先介绍频率算子。

1. 频率算子

频率反映波形起伏的剧烈程度(即变化快慢),为此可以定义频率算子为

$$W = \frac{d}{jdt} \quad (1.21)$$

如, $W[\exp(j\omega_0 t)] = \omega_0 \exp(j\omega_0 t)$ 。利用该算子,由信号波形可以方便地计算信号的频谱特征。

2. 中心频率的计算

设给定信号为 $s(t)$,则其中心频率为

$$\langle \omega \rangle = \int s(t)^* \mathbf{W} s(t) dt \quad (1.22)$$

事实上, 设 $s(t)$ 的傅里叶变换为 $S(\omega)$, 由中心频率的定义即式(1.18)以及傅里叶变换的定义即式(1.12), 得

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \int \omega |S(\omega)|^2 d\omega = \int \omega S^*(\omega) S(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint \omega s^*(t) s(t') \exp[j(t-t')\omega] d\omega dt dt' = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \iint s^*(t) s(t') dt dt' \int \left[\frac{\partial}{\partial t} (\exp[j(t-t')\omega]) d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{j} \iint s^*(t) s(t') \left[\frac{\partial}{\partial t} (\delta(t-t')) \right] dt dt' = \\ &= \int s^*(t) \frac{d}{j dt} s(t) dt \end{aligned}$$

将频率算子代入即得式(1.22)。

3. 带宽的计算

类似于中心频率的计算, 假设给定信号为 $s(t)$, 可以证明其带宽为

$$\sigma_\omega = \left[\int |(\mathbf{W} - \langle \omega \rangle) s(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (1.23)$$

证明中可以利用以下关系, 即对任意两个能量归一化信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$, 有

$$\int s_1^*(t) \mathbf{W} s_2(t) dt = \int s_2(t) [\mathbf{W} s_1(t)]^* dt \quad (1.24)$$

这一关系由分布积分公式很容易得到。

4. 任意频率函数的平均

任意频率函数 $g(\omega)$ 的平均为

$$\langle g(\omega) \rangle = \int s^*(t) g(\mathbf{W}) s(t) dt \quad (1.25)$$

其中

$$g(\mathbf{W}) = \sum g_n \mathbf{W}^n \quad (1.26)$$

而 g_n 是 $g(\omega)$ 按泰勒级数展开的系数