高中数学竞赛十年

GAOZHONGSHUXUE
JINGSAISHINIAN

（1978—1988） 试题集解

石 涧　林 源　赵维新　编

中国展望出版社

高中数学竞赛十年

（1978—1988）

试题集解

石 涧　林 源　赵维新

中国展望出版社

一九八九·北京

内 容 提 要

1.我国1978—1988年十届全国高中数学竞赛（或联赛）试题及解答；2.各省市自治区近十年高中数学竞赛题荟萃（附解答）；3.国外近十年数学竞赛题博览（附解答）。

高中数学竞赛十年

(1978—1988)试题集解

石润　林源　赵维新

中国展望出版社出版

(北京西城区太平桥大街4号)

江苏省镇江市新民洲印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本787×1092毫米1/32　印张9.7　字数210,000

1989年3月北京第1版　1989年3月　第1次印刷

印数1—16,000

统一书号：ISBN7—5050—0391—7/G·52　定价：3.16元

序　言

1988年7月，我与复旦大学舒五昌副教授，率领6名中学生，参加了在澳大利亚首都—堪培拉举行的第29届国际数学奥林匹克（IMO）。我国同学为国争光，在参赛的49个国家和地区中，总分名列第二，仅次于苏联队，其中何宏宇、陈晞两位同学以优异成绩争得金牌，其余4位同学获得银牌。回忆起在堪培拉的日日夜夜里，既有紧张的竞争，智力的角逐；在各国的领队之间，在选手之间，又充满着友谊、诚实、公正的气氛。这一切使我深信，数学竞赛，作为发现人才，培育人才的一种特殊方式，一定会持续地进行下去，越来越兴旺发达。

在我国，早在五十年代，在老一辈数学家华罗庚教授等人的发起和领导下，数学竞赛在我国的一些主要城市进行过多次，收到了可喜的成效。经过十多年的沉寂之后，1978年开始，数学竞赛又在我国重新举行，并且规模越来越大，逐渐形成全国性的“联赛”，至今已有十年了。现在，每年数以十万计的中学生参加的初、高中全国数学联赛，不仅成了广大中学生学习活动中的一个重大事件，而且也牵动着众多的教师和家长的心。

1986年，我国第一次派出“满队”参加第27届“IMO”以来，连续三年，我国中学生队都名列前茅，取得了令人瞩目的好成绩。究其原因，我想大致有以下两点：1.我国中学生有较为扎实的基础知识和较熟练的运算技能，这是我国广

大中学数学教师辛勤劳动的结果；2.从1986年初开始，在前一年全国高中联赛基础上，举办数学冬令营，选拔国家集训队；再经过短期培训和严格考试，组成国家代表队。严格的选拔和训练，是我国选手取胜的关键。这一点，已越来越被人们所接受了。

1990年，将在我国举行第31届IMO。这极大地鼓舞着我国广大中学数学教师和中学生。数学奥林匹克学校正在各地兴起，各省市已经着手准备，以便为国家输送本地区的优秀选手，为祖国争取更大的荣誉。可以预见，在近几年内，数学竞赛的培训热潮，将会一浪高过一浪。

数学竞赛所涉及内容，虽不包括高等数学，但是其中已有高等数学中某些常见的思想方法；它又不全同于中学数学教材中的内容，它包含着更广泛的专门知识，需要更为灵活的思维和技巧。近年来，国外有人提出“竞赛数学”这一名词，正是强调着它的特殊性。

为了学好数学，为了在数学竞赛中一显身手，我们的中学生迫切需要丰富的课外读物。中学数学教师在数学竞赛的组织和辅导工作中，也需要有详尽的参考资料。由中国展望出版社出版的《中学生数学竞赛丛书》，就是为了适应上述需要而编写的。丛书由下列四本书组成：1.国际数学奥林匹克三十年（1959—1989）·试题集解；2.初中数学竞赛十年（1978—1988）·试题集解；3.高中数学竞赛十年（1978—1988）·试题集解；4.数学解题研究和发现。

这些书籍复盖着不同层次的数学竞赛，即从初中到高中，再到被公认为最高水平的国际数学奥林匹克，能够满足各种不同程度和水准学生的要求。前三本书搜集到了直至最

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

近一年的资料，体现了直到目前为止最好的完备性。第四本书则着重研究数学竞赛解题方法的特性和共性，是一本居高临下来谈方法和技巧的书籍。我相信，这些书籍对广大中学生和数学教师将有很大的帮助。

这套丛书的主要组织者和撰稿人，安徽师范大学的胡炳生、胡礼祥副教授，多年来在从事高等数学教育的同时，一直担任中学数学杂志编辑，热心于数学竞赛的组织和辅导工作，是数学竞赛和数学普及工作方面的活动分子和知名人士，这就保证了这套丛书的质量。借此机会向读者推荐这一套丛书，是我十分乐于承担的义务。

中国科技大学　常庚哲

1988年11月

目　　录

第一部分

1978年全国数学竞赛（决赛）试题

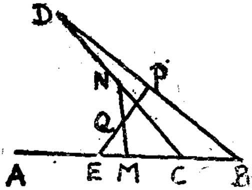
第　一　试

一、已知$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{1}{x+3}$，问当x为何值时（Ⅰ）$y>0$，（Ⅱ）$y<0$？

二、已知 $\mathrm{tg}x=2\sqrt{2}$（$180°<x<270°$），求$\cos 2x$，$\cos\dfrac{x}{2}$的值。

三、设椭圆的中心为原点，它在x轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点和长轴上较近的端点距离是$\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆方程。

四、已知方程$2x^2-9x+8=0$求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方。

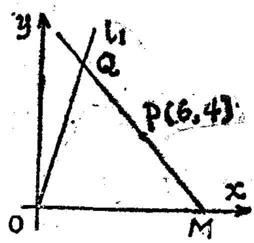


五、把半径为1的四个小球叠成两层放在桌面上，下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度。

六、设线段AB的中点为M，从AB上另一C点向直线AB的一侧引线段CD，令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q，求证：直线PQ平分线段AC。

七、证明：当n、k都是给定的正整数，且$n>2$，$k>2$时，$n(n-1)^{k-1}$可以写成n个连续偶数的和。

八、证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半。



九、已知直线l_1：$y=4x$和P(6，4)，在直线l_1上求一点Q，使过PQ的直线与l_1，以及x轴，在第I象限内围成的三角形的面积最小。

十、求方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \text{①} \\ x^3+y^3+z^3=-18 & \text{②} \end{cases}$$

的整数解。

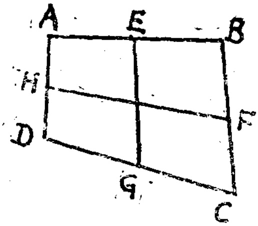
第　二　试

一、四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行，证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段。

二、（1）分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

三、设R为平面上以A(4，1)、B(−1，−6)、C(−3，2)三点为顶的三角形区域（包括三角形内部及周界）。试求当（x，y）在R上变动时，函数$4x-3y$的极大值和极小

值。（须证明你的论断）



四、设ABCD为任意给定的四边形，边AB、BC、CD、DA的中点分别为E、F、G、H。证明：

四边形ABCD面积$\leqslant EG \cdot HF$

$$\leqslant \frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)。$$

五、设有十人各拿提桶一只同到水龙头前打水，设水龙头注满第i（$i=1, 2, \cdots\cdots, 10$）个人的提桶需时T_i分钟，假定这些T_i各不相同，问：

（1）当只有一个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次序，使他们的总的花费时间（包括各人自己接水所花的时间）为最小？这时间等于多少？（须证明你的论断）

（2）当有两个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次序，使他们的总的花费时间为最少？这时间等于多少？（须证明你的论断）

六、设有一边长为1的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积（须证明你的论断）。

解　答

第　一　试

一、【解】$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$的定义域为

$$x+3>0，即x>-3$$

又　$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，故

〔I〕当$\frac{1}{x+3}<1$，即$x>-2$（当然$x>-3$）时，

$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$

(II)　当$\frac{1}{x+3}>1$，即$x<-2$且$x>-3$时，

$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$。

二、【解1】$\because 180°<x<270°$，

$\therefore \sec x=-\sqrt{1+tg^2x}$

$=-\sqrt{1+8}=-3$，

$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{3}$，

$\therefore \cos 2x=2\cos^2x-1=2\times(-\frac{1}{3})^2-1$

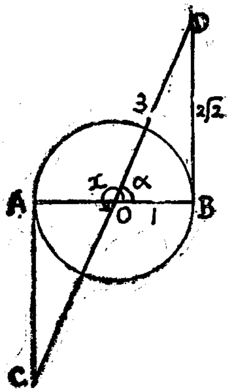
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$=-\frac{7}{9}。$$

由$180°<x<270°$，得$90°<\frac{x}{2}<135°$。

$$\therefore\ \cos\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{3}}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

【解2】作单位圆，如图，



OC为角x终边，

$$x-\pi=\alpha$$

则　$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$，

而有$OB=1$，$BD=2\sqrt{2}$，

$OD=3$，

$\therefore\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，　$\cos=\frac{1}{3}$，

(1)　$\cos 2x=\cos 2\alpha=$

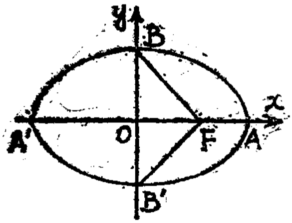
$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{9}-\frac{8}{9}=-\frac{7}{9}$$

(2)　$\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=-\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

三、【解1】如图，设所求椭圆方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,



F是它的右焦点

$\because$ $FB \perp FB'$

$\therefore$ $\triangle BB'F'$为等腰直角三角形，

$\therefore$ $OB=OF=OB'$，即$b=c$，但$a^2=b^2+c^2$，

$\therefore$ $a^2=2c^2$，$\therefore$ $a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}b$，

即 $a-c=(\sqrt{2}-1)b$。

又 $a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$

$\therefore$ $(\sqrt{2}-1)b=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$，

即 $b=\sqrt{5}$，

$\therefore$ $a=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$，

故所求椭圆方程是$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

【解2】 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

则 $B(0,b)$，$B'(0,-b)$，

$F(\sqrt{a^2-b^2},0)$

直线BF、B′F的斜率分别是

$$k_1=\frac{b}{-\sqrt{a^2-b^2}}，k_2=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}，$$

由条件$BF\perp B'F$，而有$k_1\cdot k_2=-1$

即 $\frac{b^2}{a^2-b^2}=1 \Rightarrow 2b^2=a^2$，$\sqrt{2}b=a$

但 $a-b=\sqrt{10}-\sqrt{5}$，

$$\therefore \quad b=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{10}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+1)=\sqrt{5},$$

$$a=\sqrt{10}$$

∴ 所求方程为$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$,

四、【解】设x_1，x_2为方程$2x^2-9x+8=0$的两个根，则

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{9}{2} \\ x_1 \cdot x_2=4 \end{cases}$$

设所求方程为$x^2+px+q=0$，它的两个根为x_1'，x_2'，据题意：

$$x_1'=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{2}{9},$$

$$x_2'=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}$$

$$p=-(x_1'+x_2')=-\left(\frac{2}{9}+\frac{17}{4}\right)=-\frac{161}{36},$$

$$q=x_1'\cdot x_2'=\frac{2}{9}\times\frac{17}{4}=\frac{34}{36}$$

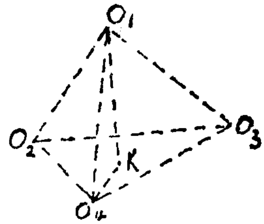
所以，求作的方程是：

$$36x^2-161x+34=0。$$

五、【解】设上层小球的球心为O_1，下层三个小球球心为O_2，O_3，O_4，连接O_1O_2、O_1O_3、O_1O_4、O_2O_3、

O_3O_4、O_2O_4，因为这四个小球两两相切，所以$O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2$，因此$O_1-O_2O_3O_4$可以看作一个棱长是2的正四面体（如图）。

过O_1作正四面体的高O_1K，那么K应是正$\triangle O_2O_3O_4$的中心，连O_4K，



则 $O_4K=\frac{2}{3}\sqrt{3}$。

$$\therefore\quad O_1K=\sqrt{O_1O_4^2-O_4K^2}$$

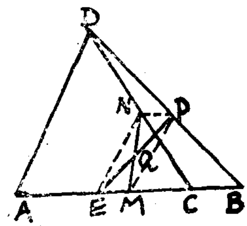
$$=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

因为O_2、O_3、O_4到桌面的距离都等于1，故面$O_2O_3O_4$平行于桌面，球O_1上最高点到桌面的距离应是

$$1+\frac{2\sqrt{6}}{3}+1=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}。$$

六、【略证】如图，设PQ交AB于E。显然，只要证明$EM=\frac{1}{2}CB$就行了。而$NP=\frac{1}{2}CB$。故又只须证明$EM=NP$。但易证$\triangle QEM\cong\triangle QPN$（a、s、a），故证。



七、【证】设n个连续偶数为2a，2a+2，2a+4，……，

$2a+2(n-1)$。

则 $S_n=\dfrac{2a+2a+2(n-1)}{2}\cdot n=[2a+(n-1)]\cdot n$

令 $[2a+(n-1)]n=n(n-1)^{k-1}$，

则 $2a+(n-1)=(n-1)^{k-1}$，

$$\therefore\quad a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}。$$

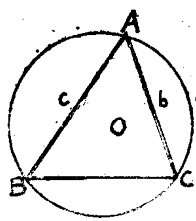
由上式可知，不论n是奇数，还是偶数，只要n为大于2、k为大于2的整数，那么a一定是正整数。

$\therefore$ a取$\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$时，$n(n-1)^{k-1}$等于n个连续偶数的和。

【评注】上述证明是一个典型逆向思维过程：从结论出发，反向思考，向条件靠近，终于获得成功。如果从正面考虑，设法把$n(x-1)^{k-1}$写成n个连续偶数之和，则事倍而功半。

八、【证1】如图，在单位圆O内，任作一锐角三角形ABC，命A、B、C各角所对的边长分别为a、b、c

$\because$ △ABC为一锐角三角形，$\therefore$ $A+B>90°$。



即 $A>90°-B$，从而

$\cos A<\cos(90°-B)=\sin B$ (1)

同理 $\cos B<\sin C$ (2)

$\cos C<\sin A$ (3)

(1) + (2) + (3)：

$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C$ (4)

又根据正弦定理有：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2,$$

$$\therefore\quad \frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2,$$

即 $$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2} \qquad (5)$$

由（4）、（5）即证。

【证2】 过A、B、C、作⊙O直径AA′、BB′、CC′。因△ABC为锐角三角形，故A′在劣弧$\overset{\frown}{BC}$上，且

$\angle AA'B=\angle C$,

$BA'<BC$,

同理：$AC'<AB$，$CB'<AC$。

又 $$\frac{BA'}{2R}=\cos\angle AA'B=\cos C,$$

即 $$\cos C=\frac{1}{2}BA'$$

同理，$\cos B=\frac{1}{2}AC'$，$\cos A=\frac{1}{2}CB'$。

$$\therefore\quad \cos A+\cos B+\cos C$$

$$=\frac{1}{2}(CB'+AC'+BA')$$

$$<\frac{1}{2}(AC+AB+BC)。$$

九、**【解】** 设Q点坐标为（x_1，y_1），则 $y_1=4x_1$，那么直线pa的方程为：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com