研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

物理学与偏微分方程

(第二版)(下册)

Physics and Partial Differential Equations

(Second Edition) (Volume II)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

物理学与偏微分方程

（第二版）（下册）

Physics and Partial Differential Equations

(Second Edition) (Volume II)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是教育部研究生工作办公室推荐的“研究生教学用书”，是在第一版的基础上修订而成的。这次修订除了改正了第一版中的几处印刷错误，并在第五章第四节末尾加了一小段外，其余未作改动。

本书力求在物理与偏微分方程之间架设一座桥梁，帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生、高年级大学生及其他学科领域与应用部门的学者和研究工作者熟练掌握近代物理学中一些重要的基本方程，了解其来龙去脉及推导过程，理解现今国际上一些重要并常见的偏微分方程数学模型，从而可以更自觉地学习和运用，并会抓住一些有意义的问题开展研究工作。

全书分上、下两册出版。下册共5章，从最基本的物理概念出发分别介绍了热弹性力学、粘弹性力学、气体分子运动论、狭义相对论和相对论流体力学、量子力学，重点介绍建立它们的基本方程的全过程，并对这些方程在数学上的结构与特征作简略的说明，还有选择地介绍了近年来国际上的一些最近的研究成果。

图书在版编目(CIP)数据

物理学与偏微分方程 . 下册/李大潜，秦铁虎编著 . —2版 .—北京：高等教育出版社，2005.4
ISBN 7-04-015954-6

Ⅰ. 物 ... Ⅱ. ①李...②秦 ... Ⅲ. ①物理学-研究生-教学参考资料②偏微分方程-研究生-教学参考资料 Ⅳ. ①04②0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第025793号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
		版　　次	2000年6月第1版 2005年4月第2版
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	20	印　　次	2005年4月第1次印刷
字　　数	340 000	定　　价	29.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　15954-00

目　　录

第六章　热弹性力学

§1. 引　言

在第五章中，我们仅讨论了弹性体在机械荷载作用下产生的变形和应力，而没有考虑温度变化所产生的影响. 其实，弹性体内温度的变化会引起附加的应变和应力. 在本章中，我们要着重讨论温度变化对弹性体变形产生的影响，即讨论热弹性体的变形及其内部温度分布所遵从的规律.

什么是热弹性体？ 热弹性体 指具有下述特征的物体：原先处在自然状态 (内部既无变形也无温度梯度) 的物体，受到机械荷载及热环境的作用所发生的变形和温度场的变化，在机械荷载和热环境撤消后会立即消失，使物体恢复到原来的自然状态，既不留下永久变形也再无温度梯度.

要得出热弹性体的变形和温度分布的规律，即建立热弹性力学的数学模型 —— 热弹性力学方程组，如同第五章对弹性体已作过的那样，必须给出相应的守恒律方程组及本构关系. 由于质量守恒定律和动量守恒定律与弹性体的温度变化无关，所以第五章导出的这两个守恒定律对热弹性体仍然成立. 但由于对热弹性体的讨论要考虑温度的变化，热弹性体不同部分之间有热量的传递，除上述两个守恒定律外，还应建立相应的 能量守恒定律. 此外，从热力学的观点看，热的传导是一个不可逆的过程，仅仅依靠能量守恒定律还不足以判断一个过程能否进行，还必须建立相应的 熵不等式. 同时，在弹性力学的本构关系中，有关的量表示为变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的函数；而在热弹性力学中，由于要考虑由温度及温度梯度引起的变形及热传导现象，在相应的本构关系中，有关的量就应该同时表示为变形梯度张量、绝对温度及温度梯度的函数.

在本章中，我们将沿用第五章中的有关记号.

§2. 能量守恒定律和熵不等式

2.1. 能量守恒定律

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为热弹性体的参考构形，即热弹性体变形前 (设为时刻 $t=0$) 在空间占据的区域. 在此区域中的点以 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 表示. 到时刻 $t\ (>0)$, 设热弹性体所占的区域由 Ω 变为 Ω_t. 这个变形由

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{x})$$

描述，其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\Omega_t$.

对任意给定的区域 $G_t\subset\Omega_t$, 我们来考察 G_t 中总能量的变化情况. 对弹性体而言，总能量是动能和应变能之和. 而对热弹性体，由于要考察由于温度变化引起的不同部分之间热量的传递，应以内能代替应变能. 这样， G_t 中的总能量应为总动能与总内能之和. 当然，这里的内能既包括热力学内能也包含应变能.

G_t 中的总动能为

$$\int_{G_t}\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}y,$$

其中 ρ 为物体的质量密度， $\boldsymbol{v}$ 为速度向量. 又设热弹性体单位质量的内能为 e, 则 G_t 中总内能为

$$\int_{G_t}\rho e\mathrm{d}y.$$

由能量守恒定律， G_t 中总能量的变化率应等于单位时间内 G_t 中体积力和 G_t 的边界 S_t 上的应力所作的功、 G_t 中热源产生的热量以及由 S_t 流入 G_t 中的热量这四部分之和.

设体积力密度，即单位质量的体积力为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 则单位时间内体积力作的功为

$$\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}y.$$

此外， Ω_t 中 G_t 以外的部分作用在 G_t 的边界 S_t 上的应力为 $\boldsymbol{T\nu}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 为柯西应力张量 (见第五章 §3.5), 而 $\boldsymbol{\nu}$ 为 S_t 上的单位外法线向

量. 这样，单位时间内 S_t 上应力作的功为

$$\int_{S_t}(\boldsymbol{T\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t.$$

设热弹性体的热源密度，即单位时间内单位质量所产生的热量为 γ, 则单位时间内 G_t 中热源产生的热量为

$$\int_{G_t}\rho\gamma\mathrm{d}y.$$

另设 $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)^{\mathrm{T}}$ 为热流密度向量：它的方向为热流即热传导的方向，而它的模长则表示单位时间内通过垂直于热流方向的单位面积的热量. 这样，对 S_t 上的任意面积微元 $\mathrm{d}S_t$, 单位时间内沿法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向流过 $\mathrm{d}S_t$ 的热量由

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t$$

给出. 因此，单位时间内通过 S_t 流入 G_t 的热量为

$$-\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t.$$

综合以上诸式，由能量守恒定律就得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{G_t}\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}y+\int_{G_t}\rho e\mathrm{d}y\right)\\=&\int_{S_t}(\boldsymbol{T\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t+\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}y\\&+\int_{G_t}\rho\gamma\mathrm{d}y-\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t.\end{aligned}\tag{2.1}$$

利用第五章引理 3.1, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_t}\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\rho e\right)\mathrm{d}y=\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}y,$$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_y)$, 而 $\nabla_y=\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1},\dfrac{\partial}{\partial y_2},\dfrac{\partial}{\partial y_3}\right)$. 于是，(2.1) 式可改写为

$$\begin{aligned}&\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}y\\=&\int_{S_t}(\boldsymbol{T\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t+\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}y\\&+\int_{G_t}\rho\gamma\mathrm{d}y-\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t.\end{aligned}\tag{2.2}$$

这就是在空间描述下 (见第五章 §1) 能量守恒定律的积分形式.

为了得到 (2.2) 的微分形式, 和第五章中类似, 要将其右端的曲面积分化为该曲面所围区域中的体积分. 设所讨论的被积函数是光滑的, 由格林公式有

$$\int_{S_t}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t = \int_{G_t}\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\mathrm{d}y, \tag{2.3}$$

$$\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t = \int_{G_t}\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}\mathrm{d}y, \tag{2.4}$$

其中 div_y 表示关于 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ 的散度. 在得到 (2.3) 式的过程中, 我们还利用了柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的对称性 (见第五章定理 3.2).

利用 (2.3) 和 (2.4) 式, 由 (2.2) 式就得到

$$\begin{aligned}&\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}y\\ =\ &\int_{G_t}(\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})-\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}+\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\gamma)\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{2.5}$$

因为 (2.5) 式对一切 $G_t\subset\Omega_t$ 均成立, 所以有

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)=\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})-\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}+\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\gamma. \tag{2.6}$$

这就是在空间描述下能量守恒定律的微分形式.

显然有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}$$

及

$$\mathrm{div}_y(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})=\mathrm{div}_y\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}+\sum_{i,j=1}^{3}t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial y_j}, \tag{2.7}$$

其中 t_{ij} 为 $\boldsymbol{T}$ 的分量, 而 $\mathrm{div}_y\boldsymbol{T}=\left(\sum_{j=1}^{3}\dfrac{\partial t_{ij}}{\partial y_j}\right)$ 为一向量 (见附录一). 在得到 (2.7) 式时, 我们再一次利用了 $\boldsymbol{T}$ 的对称性. 这样, 利用第五章得到的动量守恒定律的微分形式 (见第五章 (3.27) 式)

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}-\mathrm{div}_y\boldsymbol{T}-\rho\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}, \tag{2.8}$$

(2.6) 又可改写为如下较简单的形式：

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,j=1}^{3}t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial y_j}-\mathrm{div}_y\boldsymbol{q}+\rho\gamma. \tag{2.9}$$

这是在空间描述下能量守恒定律微分形式的另一种表示方式.

如同在弹性力学中那样，在热弹性力学中最常用的也是上述诸方程在物质描述下 (见第五章 §1) 的形式. 设参考构形中的区域 $G_0\subset\Omega$ 对应于 $G_t\subset\Omega_t$. 为了得到在物质描述下的能量守恒方程，我们要将 (2.2) 式中在 G_t 上关于变量 (y_1,y_2,y_3) 的体积分化为在 G_0 上关于变量 (x_1,x_2,x_3) 的体积分，并将在 S_t 上的曲面积分化为在 G_0 的边界 S_0 上的曲面积分. 对于前者，只要利用通常的积分变量代换，并注意到

$$\rho J=\rho_0 \tag{2.10}$$

(见第五章 (3.4) 式) 即可做到，其中 $J=\det\boldsymbol{F}$, 且 $\boldsymbol{F}=(f_{ij})$, $f_{ij}=\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, 而 ρ_0 则表示热弹性体变形前的质量密度 (仅依赖于 x, 而与 t 无关). 例如

$$\begin{aligned}&\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}y\\=&\int_{G_0}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)J\mathrm{d}x\\=&\int_{G_0}\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+e\right)\mathrm{d}x\\=&\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.11}$$

类似地，有

$$\int_{G_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}y=\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \tag{2.12}$$

$$\int_{G_t}\rho\gamma\mathrm{d}y=\int_{G_0}\rho_0\gamma\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

现考察 (2.2) 式中在 S_t 上的曲面积分的相应变化. 注意到

$$\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t=J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0, \tag{2.14}$$

(见第五章引理 3.2 中的 (3.33) 式), 其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 为 S_0 的单位外法线向量, 并利用 $\boldsymbol{T}$ 的对称性, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{S_t}(\boldsymbol{T\nu})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S_t &= \int_{S_t}(\boldsymbol{Tv})\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t\\ &= \int_{S_0}J(\boldsymbol{Tv})\cdot(\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\mathrm{d}S_0\\ &= \int_{S_0}\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}v_in_j\mathrm{d}S_0,\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中 p_{ij} 为彼奥拉应力张量

$$\boldsymbol{P}=J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\tag{2.16}$$

(见第五章 (3.39) 式) 的分量. 类似地, 易知有

$$\int_{S_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t=\int_{S_0}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0,\tag{2.17}$$

其中

$$\boldsymbol{h}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q}.\tag{2.18}$$

不难看出, $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}$ 表示单位时间内沿 $\boldsymbol{\nu}$ 方向流过 S_t 上单位面积的热量, 而 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$ 则是以未变形的 (即 S_0 上的) 单位面积来度量的单位时间内的热流量. 将 (2.11)—(2.13), (2.15) 及 (2.17) 诸式代入 (2.2) 式, 就得到

$$\begin{aligned}&\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\mathrm{d}x\\ =\ &\int_{S_0}\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}v_in_j\mathrm{d}S_0+\int_{G_0}\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\\ &+\int_{G_0}\rho_0\gamma\mathrm{d}x-\int_{S_0}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

这就是物质描述下能量守恒定律的积分形式.

为了得到 (2.19) 的微分形式, 在被积函数为光滑的条件下, 利用格林公式将其右端的曲面积分化为 G_0 中的体积分:

$$\int_{S_0}\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}v_in_j\mathrm{d}S_0 = \int_{G_0}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)\mathrm{d}x,\tag{2.20}$$

$$\int_{S_0}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S_0 = \int_{G_0}\mathrm{div}\boldsymbol{h}\mathrm{d}x,\tag{2.21}$$

其中 div 表示关于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的散度. 将 (2.20) 与 (2.21) 式代入 (2.19) 式, 就得到

$$\begin{aligned}&\int_{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\mathrm{d}x\\ =&\int_{G_0}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho_0\gamma\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.22}$$

由于 (2.22) 式对任何给定的区域 $G_0\subset\Omega$ 均成立, 应有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 e+\frac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{v}|^2\right)\\ =&\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij}v_i)-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\rho_0\gamma.\end{aligned}\tag{2.23}$$

这就是在物质描述下能量守恒定律的微分形式. 它是一个散度形式的守恒律方程.

利用第五章所得的动量守恒方程组

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}+\rho_0 b_i\quad(i=1,2,3)\tag{2.24}$$

(见第五章 (3.44) 式), 容易看出, (2.23) 式又可写为如下较为简单的等价形式:

$$\rho_0\frac{\partial e}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\gamma.\tag{2.25}$$

这是物质描述下能量守恒定律的另一种表示方式.

2.2. 熵不等式

设 η 为熵密度, 即单位质量的熵. 现考察任一给定区域 $G_t\subset\Omega_t$ 中熵的变化. 由热力学第二定律 (见附录二) 知: 单位时间内 G_t 中熵的增加量不小于这段时间内由 G_t 中的熵源供给的熵与由 G_t 的边界 S_t 流入 G_t 中的熵之和.

G_t 中的总熵为

$$\int_{G_t}\rho\eta\mathrm{d}y.$$

G_t 中的熵源就是其热源. 已知 G_t 中的体积微元 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3$ 在单位时间内产生的热量为 $\rho\gamma\mathrm{d}y$. 这些热量所供给的熵为 $\rho\gamma\mathrm{d}y/\theta$, 其中 θ 为微元 $\mathrm{d}y$ 的绝对温度 (见附录二中的 (4) 式). 于是, G_t 中的熵源在单位时间内供给的熵为

$$\int_{G_t} \frac{\rho\gamma}{\theta}\mathrm{d}y.$$

此外, 已知在单位时间内从边界面积微元 $\mathrm{d}S_t$ 流入 G_t 的热量为 $-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t$, 所以流入的熵为 $-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_t/\theta$. 这样, 单位时间内由 S_t 流入 G_t 的熵为

$$-\int_{S_t} \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\theta}\mathrm{d}S_t.$$

综合以上分析, 由热力学第二定律得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_t}\rho\eta\mathrm{d}y \geqslant \int_{G_t}\frac{\rho\gamma}{\theta}\mathrm{d}y - \int_{S_t}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\theta}\mathrm{d}S_t. \tag{2.26}$$

对上式左端利用第五章引理 3.1, 就可将 (2.26) 式改写为

$$\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y \geqslant \int_{G_t}\frac{\rho\gamma}{\theta}\mathrm{d}y - \int_{S_t}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}}{\theta}\mathrm{d}S_t. \tag{2.27}$$

这就是在空间描述下熵不等式的积分形式.

在被积函数为光滑的条件下, 利用格林公式将 (2.27) 式右端的曲面积分化为在 G_t 中的体积分, 就可将 (2.27) 式写为如下形式:

$$\int_{G_t}\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y \geqslant \int_{G_t}\left(\frac{\rho\gamma}{\theta} - \mathrm{div}_y\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right)\right)\mathrm{d}y. \tag{2.28}$$

由于 (2.28) 式对任何给定的区域 $G_t \subset \Omega_t$ 均成立, 就有

$$\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \geqslant \frac{\rho\gamma}{\theta} - \mathrm{div}_y\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right). \tag{2.29}$$

这就是在空间描述下熵不等式的微分形式.

为了得到物质描述下的熵不等式, 要将 (2.27) 式中的体积分及曲面积分分别化为 G_0 上的体积分及 S_0 上的曲面积分. 类似于对能量守恒方程所作的那样, 就可将 (2.27) 式化为

$$\int_{G_0}\rho_0\frac{\partial\eta}{\partial t}\mathrm{d}x \geqslant \int_{G_0}\frac{\rho_0\gamma}{\theta}\mathrm{d}x - \int_{S_0}\frac{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}}{\theta}\mathrm{d}S_0, \tag{2.30}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 由 (2.18) 式定义. 这就是物质描述下熵不等式的积分形式.

利用格林公式将 (2.30) 式右端在 S_0 上的曲面积分化为 G_0 上的体积分, (2.30) 式又可改写为

$$\int_{G_0}\rho_0\frac{\partial\eta}{\partial t}\mathrm{d}x\geqslant\int_{G_0}\left(\frac{\rho_0\gamma}{\theta}-\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\theta}\right)\right)\mathrm{d}x. \tag{2.31}$$

由于 (2.31) 式对任何给定的区域 $G_0\subset\Omega$ 均成立, 就有

$$\rho_0\frac{\partial\eta}{\partial t}\geqslant\frac{\rho_0\gamma}{\theta}-\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\theta}\right). \tag{2.32}$$

这就是物质描述下热力学第二定律的微分形式 —— *熵不等式*, 也称 *克劳修斯–杜海姆* (Clausius–Duhem) *不等式*.

§3. 热弹性力学的本构关系

3.1. 本构关系 自由能

对于热弹性体, 体积力密度 $\boldsymbol{b}$ 及热源密度 γ 是作为已知量给出的. 但根据 §1 中对热弹性体特性的描述, 柯西应力张量 $\boldsymbol{T}$ (从而彼奥拉应力张量 $\boldsymbol{P}$)、内能密度 e、热流密度向量 $\boldsymbol{q}$ (从而 $\boldsymbol{h}$) 以及熵密度 η 则应表示为变形 (由变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 刻画)、绝对温度 θ 以及温度梯度 $\nabla\theta=\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x_1},\dfrac{\partial\theta}{\partial x_2},\dfrac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)$ 的函数, 即

$$\boldsymbol{T} = \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta), \tag{3.1}$$

$$e = \widehat{e}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta), \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{q} = \widehat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta), \tag{3.3}$$

$$\eta = \widehat{\eta}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta). \tag{3.4}$$

以上这些关系式称为热弹性体的 *本构关系* 或 *本构方程*. 上述本构方程中的函数 $\widehat{\boldsymbol{T}}$, $\widehat{e}$, $\widehat{\boldsymbol{q}}$ 和 $\widehat{\eta}$ 的具体形式, 则完全由所讨论的材料确定. 在本构方程 (3.1)—(3.4) 中, 右端的函数 $\widehat{\boldsymbol{T}}$、$\widehat{e}$、$\widehat{\boldsymbol{q}}$ 及 $\widehat{\eta}$ 不明显地依赖于 $\boldsymbol{x}$, 这种材料称为 *齐次的*; 反之则称为 *非齐次的*. 虽然下面绝大部分的讨论内容原则上对非齐次的热弹性材料仍然成立, 但为叙述简单起见, 以下均假定所讨论的材料是齐次的.

在第五章讨论弹性力学时，本构关系除了用应力作为变形梯度的函数来表示外，还可以利用贮能函数 $W=\widehat{W}(\boldsymbol{F})$ 给出超弹性材料的本构关系. 在导出热弹性体的能量守恒方程时，我们用内能密度 e (实际上是用 ρe) 代替了贮能函数 W. 那么，对热弹性材料而言，是否可以仅仅用给出内能密度 e 的方式得到本构关系呢？通过仔细的考察可以发现，这种想法起码是不完全的. 事实上，在热弹性体的内能中包含了热能. 热力学告诉我们，热能是不可能全部转化为机械功的；而只有作机械功的那一部分能量才能使热弹性体产生变形. 由热力学知 (见附录二): 在温度不变的情况下，亥姆霍兹自由能是介质作机械功能力的一个量度. 因此，代替内能密度 e, 我们可以选取单位质量的亥姆霍兹自由能

$$\psi=e-\theta\eta \tag{3.5}$$

来给出本构关系. 虽然在这里 e 并不仅仅表示热力学内能，但由于应变能是可以完全转化为机械功的，所以上述亥姆霍兹自由能仍可作为 (在温度不变时) 介质作机械功能力的一个量度.

下面我们说明：若给出亥姆霍兹自由能的本构方程

$$\psi=\widehat{\psi}(\boldsymbol{F},\theta,\nabla\theta), \tag{3.6}$$

就可由它导出本构关系中关于 $\boldsymbol{P}$ (从而 $\boldsymbol{T}$) 、η 以及 e 的方程.

将 $e=\psi+\theta\eta$ 代入能量守恒方程 (2.25), 并注意到 $v_i=\dfrac{\partial y_i}{\partial t}$ 及 $f_{ij}=\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, 可得

$$\begin{aligned}&\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial t}+\rho_0\eta\frac{\partial\theta}{\partial t}+\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial t}\\&=\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+\rho_0\gamma.\end{aligned} \tag{3.7}$$

而将 (3.6) 式关于 t 求导，则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}&=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial f_{ij}}\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}\\&\quad+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial(\frac{\partial\theta}{\partial x_k})}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$