

高中数学学习方法 与 能力培养

贾胜春 编著

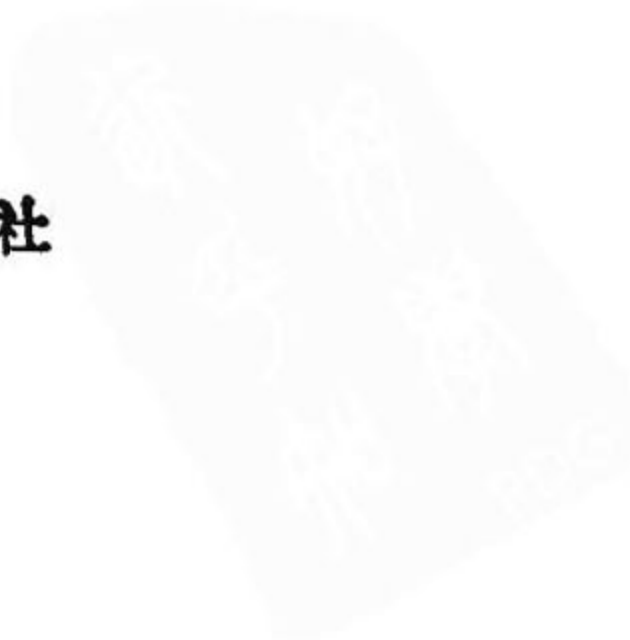


河北教育出版社

高中数学学习方法 与能力培养

贾胜春 编著

河北教育出版社



高中数学学习方法与能力培养

贾胜春 编著

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷 河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32	15印张	322,000字	1989年9月第1版
1989年9月第1次印刷	印数：1—1938	定价：4.00元	

ISBN 7-5434-0443-5/G·371

前 言

方法的问题,是完成过河任务时“桥”和“船”的问题。学习数学的主要任务是切实掌握基本概念,基本命题,基本方法,并能灵活运用数学基础知识分析和解决有关的问题。但不少人在应用理论解决数学问题时感到困难。这一方面与没有掌握好数学基础知识和基本方法有关,但也往往是没有正确的学习方法,使数学能力低下所致。

本书就是从上述考虑出发,对学习高中数学中的定义、命题、例题的方法以及单元复习的方法从理论上作了系统的阐述,并附有实例;对应具有的数学能力作了系统的总结。力图在掌握数学基础知识,灵活运用数学方法,提高数学能力方面对读者有所帮助;力求有助于读者学习分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法,还结合学习者常犯的 errors 和容易混淆的问题,从理论上及方法上作了重点阐述。

本书是为帮助广大高中学生学好数学而编写的,也可做广大自学青年的辅导读物,也可供高中数学教师阅读参考。

望广大读者对书中的缺点和错误提出批评意见。

编 者

1987 年 11 月

目 录

一、高中数学的学习任务·····	(1)
二、高中数学的学习方法·····	(3)
(一) 学习定义的方法·····	(3)
(二) 学习命题的方法·····	(22)
(三) 学习例题的方法·····	(33)
(四) 单元复习的方法·····	(48)
三、数学能力·····	(65)
(一) 思维能力·····	(65)
(二) 灵活运用概念的能力·····	(103)
(三) 灵活运用命题的能力·····	(201)
(四) 灵活运用主要数学方法的能力·····	(268)
(五) 数形结合的能力·····	(378)
(六) 运算能力·····	(406)
(七) 想象能力·····	(418)
(八) 自学能力·····	(436)
附录一 递推数列的通项公式·····	(442)
附录二 常见的几类典型的错解或不严谨解法·····	(465)

一、高中数学的学习任务

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。是学习和研究现代科学和技术必不可少的基本工具。中学数学教学大纲指出，中学数学的教学目的是：使学生学好数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。因此，中学数学的学习任务就是：既要学好数学的基础知识，又要具有一定的数学能力。

知识是人们对客观现实认识的结果，反映客观事物的属性与联系。人类的知识来源于直接经验，但不能事事靠直接经验。事实上，多数知识都是间接经验的东西。书本知识对学生来说就是一种间接经验，它是人类在长期实践中各种经验的概括和总结。高中数学基础知识，是指高中数学课本中的定义、定理、公式、性质、法则，其知识面甚广，要学好这些知识，必须有明确的学习目标和正确的学习方法。

学习知识，需要具有一定的能力，传统数学教学认为能力包括运算能力、想象能力和逻辑思维能力。实际上这三种能力不是平行的，可以说思维能力在各种能力中居核心地位，思维能力是各种能力发展的基础，它控制和制约着各种能力的发展，指挥和调节着各种能力的运用。各种能力的发展依赖于思维能力，同时又有助于思维能力的发展。因此，在学习中，必须把思维能力的培养作为发展能力的核心。

掌握知识是发展能力的主要的和必要的条件，在学习知识的过程中，能力也就得到了发展，反过来能力发展的水平又是影响知识掌握的重要条件。因此知识的掌握和能力的发展是互相依存的，能力要通过对知识的掌握而形成和发展，而掌握知识的程度和速度又要受已有能力的影响。所以学习数学，既要重视知识的掌握，又要重视能力的培养，二者不能偏倚。

二、高中数学的学习方法

学习高中数学的方法多种多样,但归纳起来主要有两种。一是机械的学习,也就是机械识记所学的东西,硬性地记忆解题的方法。主要表现是:只注意“是什么”,不注意“为什么”;只注意“记忆”,不注意“思维”;只注意“解题”,不注意“归纳总结”;只注意“孤立的知识”,不注意“横向纵向的联系”。无可非议,记忆所学的定义、定理、公式、性质、法则,解答一定数量的习题是非常必要的,是学习数学不可缺少的。但更重要的是理解的学习。其主要表现是:不仅注意“是什么”,而且注意“为什么”;不仅注意“结论”,而且注意“发现结论,得出结论的过程”;不仅重视解题,而且重视其分析的过程,并总结从题中应得到什么;不仅重视这一部分知识的学习,而且注意这一部分知识与其它知识的多方面的联系。因此,只有通过理解的学习,才能迅速地掌握知识,也只有在理解的过程中才能使数学能力得到发展。所以要学好数学,必须充分“理解”。

(一) 学习定义的方法

中学数学教学大纲指出“正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提”。数学概念是现实世界空间形式和数量关系及其特征在思维中的反映。概念是一种思维形式,客观事物

通过人的感官形成感觉、知觉,通过大脑加工——比较、分析、综合、概括——形成概念,建立一个概念,一般是运用由特殊到一般、由局部到整体的观察方法,遵循由现象到本质,由具体到抽象的认识规律,按照辩证唯物主义的观点去分析,找出事物的外部联系和内在的本质。因此概念是培养学生逻辑思维能力的重要内容。概念又是思维的工具,一切分析、推理、想象都要依据概念和运用概念,所以正确理解概念是提高学生数学能力的前提。相反地,如果对学习概念重视不够,或是学习方法不当,既影响对概念的理解和运用,也直接影响着思维能力的发展,就会表现出思路闭塞、逻辑紊乱的低能。中学数学中的概念多以定义的形式出现,因此必须有学习定义的正确方法。一般说来,有以下几个环节:

1. 从定义的建立过程明确定义

定义是在其形成的实际过程中逐渐明朗化的。任何一个定义的产生都有它的实际过程,学习定义时要想象前人发现定义的过程。从定义形成的过程中,认识其定义的必要性和合理性,这样可以达到理解定义训练思维的目的。

一个定义的形成,一般地说有四个阶段:

(1) 提出问题

学习一个新定义,将给学生开辟数学王国的新天地,了解提出数学定义的方法,可培养学生发现数学问题的能力。提出数学定义的常见方法有以下几种:

1) 从实例提出

理论的基础是实践,高中数学中大量的定义,如集合、映射、一一映射、函数、等差数列、等比数列、柱体、锥体等,都是从实例中归纳总结出来的。

2) 通过迁移提出

数学的特征之一是它的系统性，因此常常可以从旧知识过渡迁移而得出新的定义。如球的定义可以从圆的定义迁移而得出；双曲线的定义可以从椭圆的定义迁移而得出；反三角函数的定义可以从反函数的定义结合原来的习题迁移而得出等。

3) 观察图形或实物提出

“形”是数学研究的对象之一。观察函数的图形可以得出函数的单调性、增减性、奇偶性、周期性等定义，观察空间的直线与直线、直线与平面、平面和平面的位置关系可以得出异面直线、直线与平面平行、相交和垂直的定义，平面与平面平行、相交和垂直的定义等。

4) 从形成的过程提出

数学中有些定义是通过实际操作而得出的。其操作过程就是定义，这样的定义叫形成性定义。如圆、椭圆的定义，异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的平面角等。

(2) 探索问题的解答

如果学生了解了一个新定义提出的方法，那么心理状况必是：对如何定义有迫切的愿望，因而兴趣被激发，积极主动地去思考得出概念的过程。急切想通过自己冷静的思考去试寻问题的解答。这样既有利于掌握定义的本质，又能较快地发展逻辑思维能力，提高分析问题和解决问题的能力。相反地，如果只知是什么，而不知定义得出的过程，那么所学的知识往往是僵死的，妨碍对定义的灵活运用，能力也得不到应有的提高。因此应该掌握探索问题解答的正确方法。

1) 从实例提出的定义, 要对所举各例进行分析, 去掉其个别的、非本质的东西, 抓住其共同的、本质的东西, 抽象概括寻求问题的解答。

2) 对通过迁移提出的定义, 要在对旧知识准确理解与运用的基础上, 进行比较、分析、推理, 去寻求问题的解答。

3) 对观察图形或实物得出的定义, 要在教师的指导下, 按照观察的目的, 运用正确的观察方法, 认真观察, 仔细分析。同时还要对正反两方面的图形加以比较, 去寻求问题的解答。

4) 对于形成性定义, 要亲自动手进行实际操作, 同时操作的每一步都要进行认真地分析, 找出操作能顺利进行的条件或操作不能进行的原因, 写出使操作能顺利进行的操作过程, 去寻求问题的解答。

(3) 检验解答的合理性

检验解答的合理性, 可以通过实践, 也可以利用已有的知识进行逻辑推理, 若发现有不合理的因素, 要加以修改或补充。这样既可加深对定义的理解, 又可培养学生严谨的作风。

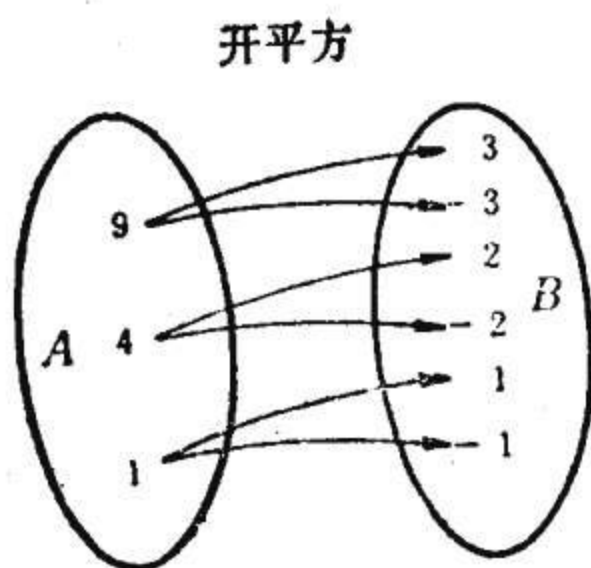
(4) 写出合理的解答, 即为定义。

下面通过一些具体实例加以说明。

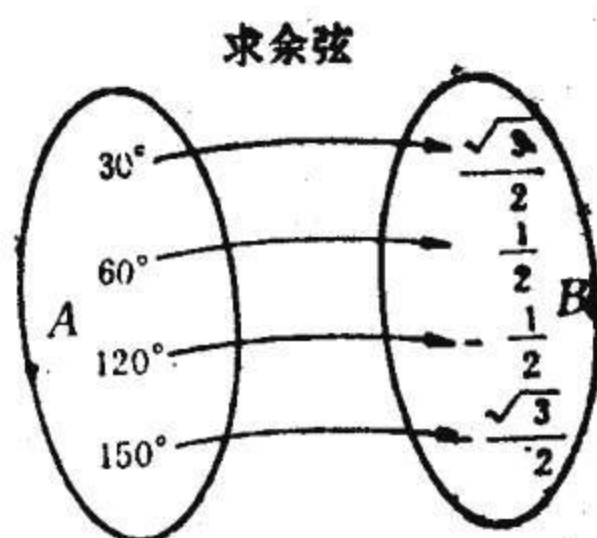
例1 映射的定义

映射的定义, 是从实例提出的。先观察教材中举出的三个例子:

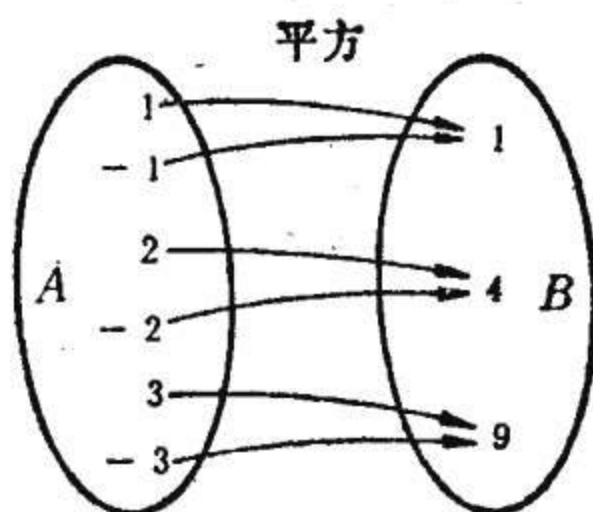
认真地进行分析、比较, 找出它们的共同之处: A 中的一个或几个元素, 在 B 中都有一个或几个元素与之对应。



(1)



(2)



(3)

不同之处：(1) 的 A 中的任意一个元素在 B 中有两个元素与之对应；(2) 的 A 中的任意一个元素在 B 中都有唯一的元素与之对应；(3) 的 A 中的两个不同元素在 B 中有同一元素与之对应。抓住它们都由三部分（集合 A 、集合 B 、从 A 到 B 的对应法则 f ）组成。而集合 A 、 B 所含元素各不相同，对应法则又各异的具体性。就可理解映射的定义，就是去掉了集合 A 、 B 以及对应法则的具体性，抓住了 (2) (3) 两例的共同的本质的东西—— A 中的任何一个元素，在 B 中都

有唯一的元素与它对应而得出的。这样不仅有利于抓住映射的实质：映射 $f: A \rightarrow B$ 是由三部分（集合 A 、 B 以及对应法则 f ）组成的；映射具有方向性： $A \rightarrow B$ ； A 中的任何一个元素在 B 中都有唯一的元素与它对应；不要求 B 中的每一个元素都有原象，即象集合是集合 B 的子集（象集合 $D \subseteq B$ ）。而且把观察、分析、综合、抽象、概括的逻辑思维方法寓于定义的形成过程之中。相反地，如果不去思考定义得出的过程，只是机械记忆定义，虽然方便省力，但不利把握映射的实质，数学能力也难以提高。

例2 异面直线所成的角的定义

教材一开始就直接给出定义：“如果 a 、 b 是两条异面直线，过空间任意一点 O ，…”若不去思考并解答，怎么想到研究异面直线所成的角呢？为什么在空间任取一点 O ？为什么过 O 分别作 a 、 b 的平行线？…而是死记硬背，不仅不利于掌握和运用这一定义，更有害的是，还可能在未来的生活或工作中人云亦云，不会独立思考问题，要想提出有创见性的新问题更是相当困难的。因此应该联想已有的知识，推测发现、建立此定义的实际过程，解答定义中提出的每一个问题。

(1) 问题的提出

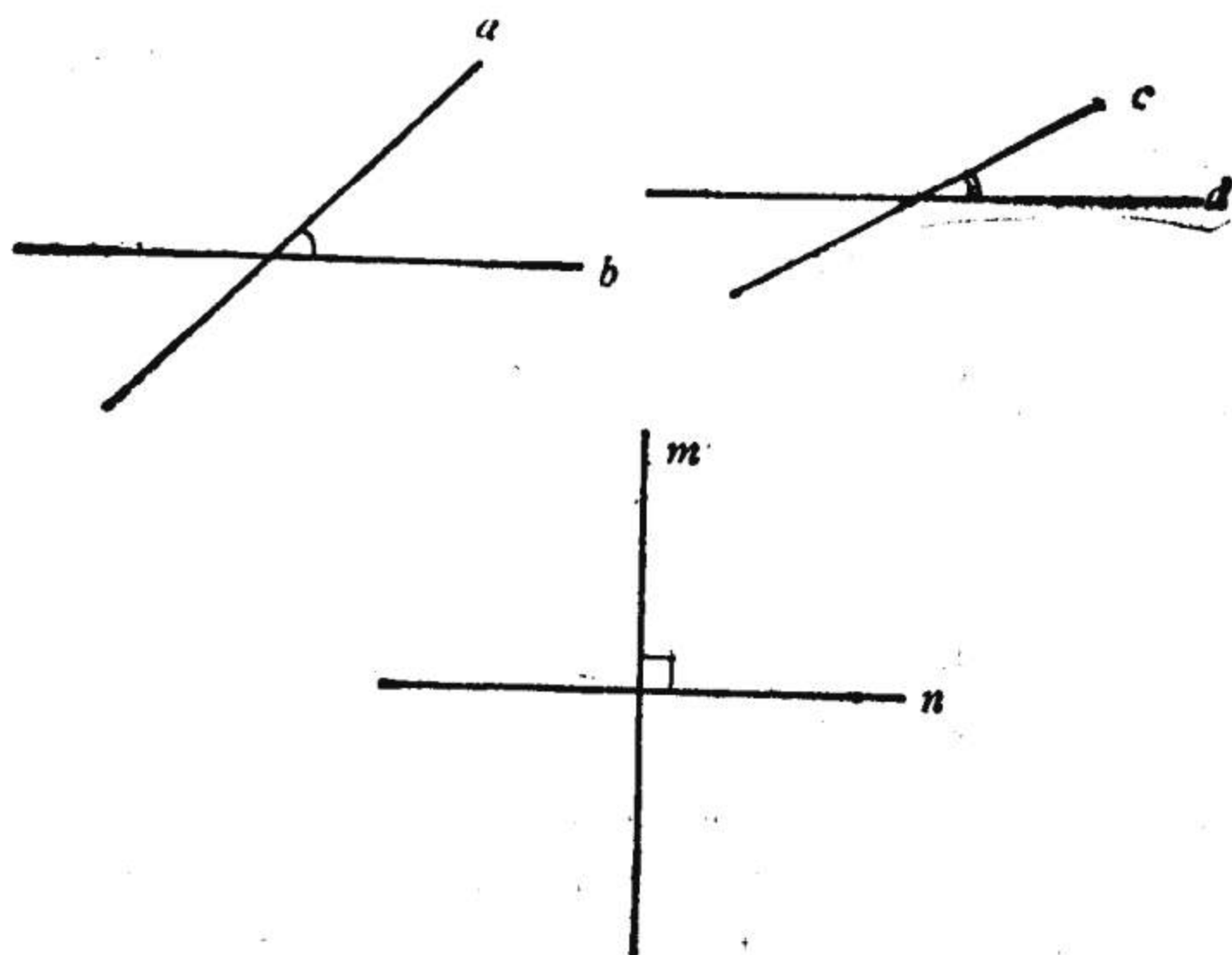
从“角”的定义出发，从分析两条不重合直线的位置关系入手。

1) 相交

共性：在同一平面内，有且只有一个公共点，对顶角相等，邻角互补。

个性：交角的大小不同。这两条相交直线与另外两条相

交直线的区别，可用它们所成的角的大小来描述。如



a 、 b 成 45° 角； c 、 d 成 30° 角； m 、 n 成 90° 角，即 m 、 n 互相垂直。

2) 平行

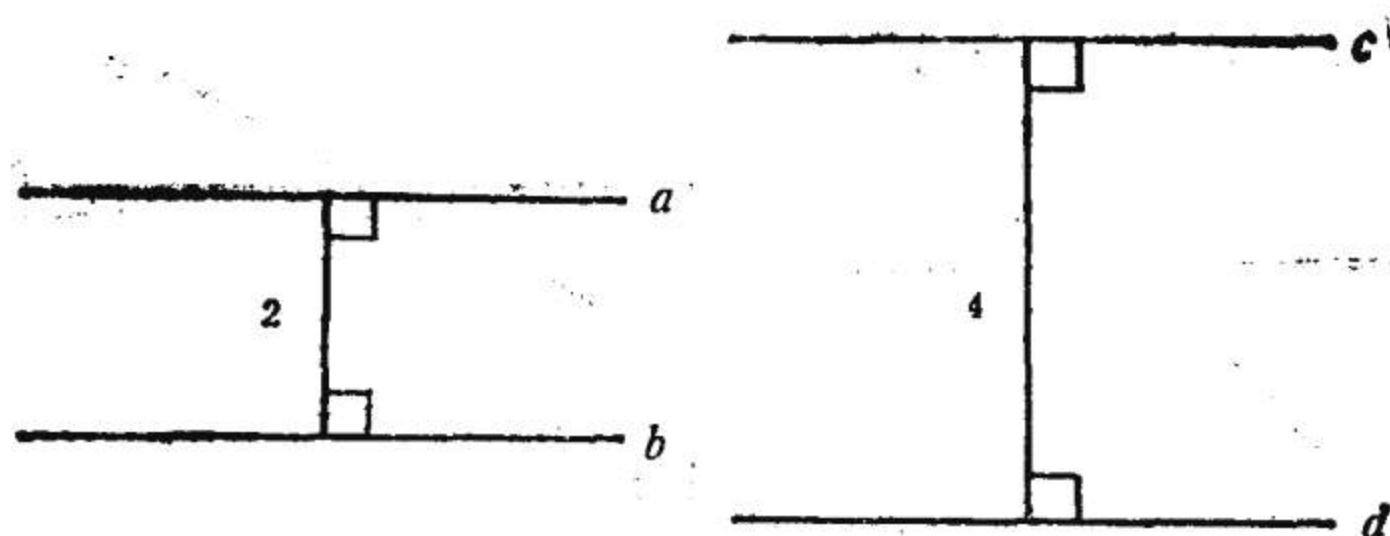
共性：在同一平面内，没有公共点。以及平面几何中所学过的平行线的性质如同位角相等，内错角相等。

个性：距离的大小不同。这两条平行直线与另外两条平行直线的区别用距离来描述。如

a 、 b 的距离是 2cm ； c 、 d 的距离是 4cm 。

3) 异面直线

共性：不同在任何一个平面内，没有公共点。



个性：这两条异面直线与另外两条异面直线的区别应该用什么来描述呢？通过演示，从不同的角度观察不同的异面直线，便可发现，两条异面直线既可投影成两条相交直线，又可投影成两条平行直线（当然还可投影成一条直线和线外的一个点），通过观察、分析，不难得出可以用异面直线所成的角和异面直线的距离来描述。

(2) 探索问题的解答

要探索异面直线所成的角的定义，自然会联想平面几何中角的定义：从一点出发的两条射线组成的图形叫角。顶点和角的两边是角必备的三个条件。在观察两条相交直线所成的角的基础上，就会思考，异面直线没有公共点，顶点取在哪？两边又该如何作？反复进行演示，认真进行观察，就能理解为什么在空间任取一点 O （这是取角的顶点）为什么过点 O 分别作 a 、 b 的平行线（这是作角的两边，把异面直线所成的角，转化为两条相交直线所成的角），从而得出异面直线所成的角的定义（初始定义，未经检验的定义）。

(3) 检验解答的合理性

为了检验所给的定义的合理性，可对其作法进行推敲。

1) 存在性。在空间任取一点 O (可取，有无数多种取法)，过点 O 分别作异面直线 a 、 b 的平行线 (当 O 取定后，能作，各有且只有一条)。因此这个角是存在的。

2) 确定性。如果改变点 O 的位置到 O' ，按照两条相交直线所成的角通常是指所成的锐角或直角的规定，由等角定理可知，这样定义的角的大小是确定的。这就是说，这样定义的角的大小只由异面直线 a 、 b 的相互位置确定，与点 O 的位置无关。

由此可知这样定义的角是合理的。

例 3 椭圆的定义

(1) 问题的提出

教材指出：椭圆是一种常见曲线，如汽车油罐横截面的轮廓；天体中一些行星和卫星运行的轨道。在立体几何中，画直观图时，圆的一种直观图也是椭圆。

(2) 探索问题的解答

我们知道圆是平面内到定点的距离等于定长的点的轨迹。圆的图形我们用圆规就可画出来。那么，椭圆曲线上的点具有什么共同性质，椭圆曲线是怎样画出来的呢？

首先要按教材的要求亲手画图，边画边思考：哪些是定点？哪些是动点？哪些是常量？哪些是变量？曲线上的点具备什么共同性质？然后抓住这个共同点，仿照圆的定义的句子结构，用语言叙述出来，便可作为椭圆的初始定义。

(3) 检验解答的合理性

为了检验所给定义是否合理，要对其画法进行推敲。“取一条定长为 $2a$ 的绳子 ($a > 0$)”，显然是可取的。“在平面 α 内取两个定点 F_1 、 F_2 ”，显然这样的两个点也是可取的。当我们要画曲线时，就会发现有三种情况：

1) 若 $2a < |F_1F_2|$ ，此图无法画，即没有轨迹。

2) 若 $2a = |F_1F_2|$ ，则图形不是椭圆，而是线段 F_1F_2 ，(思考其理由)。

3) 若 $2a > |F_1F_2|$ ，图形定能画出来，且为椭圆。

同时还会发现：如果动点 M 不在平面 α 内，也形不成椭圆曲线，因此，在平面 α 内是形成椭圆的一个条件。

据此，对所给出的定义加以补充或修改，便可得出椭圆的准确定义。

这样对椭圆的定义就会加深理解。

“平面内”是椭圆形成的条件。去掉它，就不是椭圆了(想一想，会是什么)。

“ $2a > |F_1F_2|$ ”也是椭圆形成的条件，去掉它，也就不是椭圆了(或是线段 F_1F_2 ，或是没有轨迹)。

“动点到两个定点的距离之和等于定长 $2a$ ”是定义的核心。

例 4 反正弦函数的定义

(1) 提出问题

看到“反正弦函数”，不难想到：

1) 反函数的定义。

2) 原来学过的函数，一次函数存在反函数，且反函数也是一次函数；正比例函数存在反函数，且反函数也是正比例函数；反比例函数存在反函数，且反函数是它本身；指数