高考数学
总复习指导及自测

GK

GAO KAO
ZONG FU XI
ZHI DAO JI ZI CE

海洋出版社出版

高考数学总复习指导及自测

辛奎庭　编著

海 洋 出 版 社

1989年·北京

高考数学总复习指导及自测

辛奎庭　编著

*

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）

新华书店首都发行所发行　　北七家印刷厂印刷

开本：32　印张：7.5　字数：168千字

1989年12月第一版　　1989年12月第一次印刷

*

ISBN 7-5027-0796-4/G·334

¥　2.77元

前　言

为了推动基础学科的学习，与学科复习所需，编写此书，系列配套出版，给予学习与复习创造条件，学科各册均根据教学大纲要求，适应当前教与学所需，便于读者学习与复习。

书中加强了基本内容的系统性、综合性，有利于双基的掌握，安排上加强基本内容的提炼，注意运用基础知识和基本技能，达到提高分析问题，解决问题能力，精选了相应例题和习题，并给予分析与解答，以供读者学习与复习时使用方便。

参加编写的还有赵欣、晓辰、肖荣、欣荣、炎逊等同志，由防杏菊同志审定。因版面篇幅所限，时间仓促，水平有限，如有不当之处，欢迎给予批评指正。

编写者

1939.6

目　录

三角部分

第一章　三角函数

一、知识要点

（一）任意角的三角函数

1．角

（1）角的概念：角的定义、正角、负角，零角，终边相同的角，象限角．

（2）角的度量：角度制，弧度制；角度与弧度的换算；弧长公式．

2．三角函数

（1）三角函数的定义．

（2）用单位圆、线段表示三角函数．

由三角函数定义可以认识到如下几点：

①三角函数是以角为自变量，函数值是比值，它与角的终边上的点的位置无关．

②当角用弧度制表示时，每个角均对应于一个实数，对于每一个确定的角，它的三角函数的值都是唯一确定的．所以三角函数也可看做是定义在实数集或它的子集上的函数．

③三角函数的符号，决定于角α的终边所在象限．

④在直角三角形中各边的比与各锐角的函数关系，可以看作上述定义的特殊情况．

3．特殊角的函数值要熟练记忆，便于应用．

α	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$

4．诱导公式

（二）同角三角函数关系

1．倒数关系；

2．商的关系；

3．平方关系．

（三）三角函数性质　（略）

（四）三角函数图象　（略）

二、选题汇萃

例1　求下列各三角函数的值．

（1）$\sin(-2040°)$；　（2）$\operatorname{tg}\left(-\frac{89}{6}\right)\pi$；

（3）$\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)$．

分析：将任意角的三角函数转化为锐角三角函数，从而可求其值。

解　（1）$\sin(-2040°)$

$$=-\sin(5\times360°+240°)$$

$$=-\sin(180°+60°)$$

$$=-(-\sin60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$；

（2）$\operatorname{tg}\left(-\frac{89}{6}\pi\right)$

$$=-\operatorname{tg}\left(7\times2\pi+\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$=-\mathrm{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\left(-\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

（3） $\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)$

$$=\cos\frac{20}{3}\pi$$

$$=\cos\left(3\times2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

例1类型题处理的一般步骤：首先将负角化成任意正角的三角函数，然后化为小于周角的三角函数，最后化成锐角的三角函数再求值。

例2 求下列各函数的定义域。

（1） $y=\sqrt{-\frac{\cos x}{\sin x}}$； （2） $y=\sqrt{\mathrm{tg}(2x-\pi)}$；

（3） $y=\lg(-\cos x)$； （4） $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$。

分析：对于最基本三角函数的定义域均要熟练掌握，异于三角函数的定义域的求法，依函数关系式的具体形式而定，问题比较复杂。

一般要注意象限角的概念，并结合分式、根式等存在形式的意义，综合而决定，然后可利用不等式（组），即可解得。

解　（1）$\because\ y=\sqrt{-\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\sqrt{-\operatorname{ctg} x}$

$\therefore\ -\operatorname{ctg} x\geqslant 0$，则$\operatorname{ctg} x\leqslant 0$

$\therefore\ n\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<(n+1)\pi$.

故所求函数的定义域为：

$$n\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x<(n+1)\pi \qquad (n\in Z)$$

（2）$\because\ y=\sqrt{\operatorname{tg}(2x-\pi)}=\sqrt{-\operatorname{tg}(\pi-2x)}=\sqrt{\operatorname{tg}2x}$

$\therefore\ \operatorname{tg}2x\geqslant 0$，

$\therefore\ 2n\pi\leqslant 2x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$　或

$$(2n+1)\pi\leqslant 2x<2n\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

即：$n\pi\leqslant x<n\pi+\dfrac{\pi}{4}$　或

$$\frac{(2n+1)\pi}{2}\leqslant x<n\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

故所求函数的定义域：$n\pi\leqslant x<n\pi+\dfrac{\pi}{4}$

或　$\dfrac{(2n+1)\pi}{2}\leqslant x<n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$　　$(n\in Z)$

（3）$\because\ y=\lg(-\cos x)$

$\therefore\ -\cos x>0$，即　$\cos x<0$.

因此，函数的定义域是终边在第二或第三象限或x轴负半轴的角度值的集合。

即　$2n\pi+\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}$；　　　$(n\in Z)$

(4) 此函数的定义域可由不等式组：

$$\begin{cases}\sin x\geqslant 0 & (1)\\ 16-x^2\geqslant 0 & (2)\end{cases}$$ 来确定

由（1）式可解得：　$2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$　$(n\in Z)$

由（2）式可解得：　$-4\leqslant x\leqslant 4$

故此不等式组的解为：　$-4\leqslant x\leqslant -\pi$

或　$0\leqslant x\leqslant \pi$

即函数的定义域为：

$-4\leqslant x\leqslant -\pi$　或　$0\leqslant x\leqslant \pi$；

例3　已知：$\operatorname{ctg}\alpha=5$，求：

$$\frac{3}{5}\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha \text{的值。}$$

分析：已知余切值或正切值，求同角的含正弦，余弦三角函数式的值，一般可用两种方法：其一可应用公式：

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\text{与}\quad\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

从已知条件求出余弦与正弦后，代入求解。

其二，可将所求三角函数式化为只含有余切的三角函数式，再将已知条件代入即可。但为避免根号前的符号讨论，故常用方法二。

解：$\frac{3}{5}\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$$=\frac{\frac{3}{5}\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{1}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 5^2-\frac{1}{2}}{1+5^2}=\frac{29}{52}.$$

例4 若$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证：$a^2+b^2=1$。

证： $\because$ $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，

设 $a=\sin\alpha$，（α为锐角）代入已知等式.

得 $\sin\alpha\sqrt{1-b^2}+b\cos\alpha=1$.

将其移项后，两边再平方，可得：

$\sin^2\alpha-b^2\sin^2\alpha=1-2b\cos\alpha+b^2\cos^2\alpha$。

整理： $b^2-2b\cos\alpha+\cos^2\alpha=0$，

$b=\cos\alpha$，

$\therefore$ $a^2+b^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。

例5 计算：（1）已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2ab}{a^2-b^2}$。求$\sin\alpha$；

（2）已知 $m+\frac{1}{m}=2$；

求： $m^2+\frac{1}{m^2}$ 与 $m^3+\frac{1}{m^3}$；

解： （1） 设 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$。 因 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2ab}{a^2-b^2}$。

则 $y=2ab$，$x=a^2-b^2$。

即 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(a^2-b^2)^2+(2ab)^2}=a^2+b^2$。

所以　$\sin\alpha=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

(2)　由题设：$m+\dfrac{1}{m}=2$,

所以　$m^2+\dfrac{1}{m^2}=\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^2-2$. 代入可得

即：　$2^2-2=2$。

$$m^3+\frac{1}{m^3}=\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m^2-1+\frac{1}{m^2}\right)$$

即：　$2(2-1)=2$。

例6　化简

(1)　$\sqrt{1-\sin^2 93^\circ}$;

(2)　$\sqrt{1-2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$;

(3)　$(\mathrm{tg}^2\theta+1)\sqrt{1-\sin^2\theta}$. （$\theta$ 为第二象限角）

分析：解题时要注意性质符号的确定，对于特殊角依化简的要求需计算为实数的值。

解：（1）原式$=\sqrt{\cos^2 93^\circ}=-\cos 93^\circ$

(2)　原式$=\sqrt{(\sin 15^\circ-\cos 15^\circ)^2}$

$$=\cos 15^\circ-\sin 15^\circ$$

$$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(3) 原式$=\sec^2\theta\cdot(-\cos\theta)=-\sec\theta$.

例7　求 $y=\mathrm{tg}3x+2\mathrm{ctg}x$的周期.

分析：分别求出其周期后，再求其最小公倍数即可。

解：

$\because$　$\mathrm{tg}3x$的周期是$\dfrac{\pi}{3}$，　$\mathrm{ctg}2x$ 的周期是$\dfrac{\pi}{2}$；

$\therefore$ 所求函数 $y=\text{tg}3x+2\text{ctg}2x$ 的周期为 $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 的最小公倍数是 π。

例8 已知：函数 $y=1-2\sin^2x-2\cos x$，

求：当 x 为何值时，函数有极值。

分析：首先将式子内化为同名的三角函数，再根据二次三项式的求极值方法，即可求出极值，一般要注意到正弦函数与余弦函数是有界函数，而正余切函数为无界函数。另外求解时并要注意其实际意义。

解：

$\because$ 由题设 $y=1-2\sin x^2-2\cos x$ 将其化为：

$$y=1-2(1-\cos^2x)-2\cos x$$
$$=2\cos^2x-2\cos x-1$$
$$=2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，

即：$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 时（n 为整数），

有：$y_{\text{最小值}}=2\cdot0^2-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$；

当 $\cos x=-1$，

即：$x=(2n+1)\pi$ 时（n 为整数），

有：$y_{\text{最大值}}=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=3$。

例9 当 $2\alpha+\beta=\pi$ 时，

试求函数 $y=\cos\beta-6\sin\alpha$ 的最值。

分析：用倍角公式诱导公式化为同名三角函数并应用正余弦函数的有界性讨论出其极值，

解：由已知条件 $2\alpha+\beta=\pi$，

则 $\beta=\pi-2\alpha$，

$y=\cos\beta-6\sin\alpha=\cos(\pi-2\alpha)-6\sin\alpha$

$=-\cos2\alpha-6\sin\alpha=2\sin^2\alpha-6\sin\alpha-1$。

设 $\sin\alpha=x$，那么 $x\in[-1,\ 1]$，

则 $y=2x^2-6x-1$，$x\in[-1,\ 1]$

$\because$ $x=-\dfrac{-6}{2\times2}=\dfrac{3}{2}\overline{\in}[-1,\ 1]$

$\therefore$ 函数y的最值在闭区间的端点才可取得。

故 当$\sin\alpha=x=-1$时，

函数y的最大值为7。

当$\sin\alpha=x=1$时，

函数y的最小值为-5。

三、单元自侧

1．判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$；

(2) $f(x)=\dfrac{\sin3x}{\cos4x}$；

(3) $y=1+\cos x-|\operatorname{ctg}x|$；

(4) $y=\sin^3x-\sec^2x$。

2．a取什么值时，下列各式才有意义．

(1) $\sin x=\dfrac{3-a}{3a+2}$；　(2) $\cos x=\dfrac{5a-2}{2-3a}$。

3．求下列函数的定义域．

(1) $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$;　　(2) $y=\sqrt{-\dfrac{\cos x}{\sin x}}$;

(3) $y=\lg\sin x$;　　(4) $y=\dfrac{\lg(\operatorname{tg}x+1)}{\sqrt{\cos x}}$.

4. 已知$\operatorname{ctg}\alpha=5$，求下列各式的值。

(1) $\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;　　(2) $\dfrac{3}{5}\cos^2\alpha-\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha$.

5. 试用$\cos\theta$，再以$\sin\theta$表示以下各式。

(1) $\cos^4\theta-\sin^4\theta$;　　(2) $1-\operatorname{tg}^4\theta$;

(3) $\sin^6\theta+\cos^6\theta$.

6. 求下列三角函数的周期。

(1) $\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;　　(2) $\cos\dfrac{\pi(x+1)}{2}$;

(3) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}$.

7. 化简

(1) $\sqrt{1-2\sin10^\circ\cos10^\circ}$;

(2) $\cos\left[\left(\dfrac{4n+1}{4}\right)\pi+\alpha\right]+\cos\left[\left(\dfrac{4n-1}{4}\right)\pi-\alpha\right]$

$(n\in Z)$;

(3) $\dfrac{\operatorname{tg}(n\pi-\alpha)\cdot\cos^2(n\pi+\alpha)}{\cos^2[(2n+1)\pi-\alpha]\cdot\sin(n\pi-\alpha)}$.

8. 求证:

(1) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}=(\operatorname{tg}x+\sec x)^2$;

(2) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$.

9. 化简：　$\csc^4\theta(1-\cos^4\theta)-2\operatorname{ctg}^2\theta)$.

10．已知： $\theta\in[0, \frac{\pi}{2}]$，试证：

$\cos(\sin\theta)>\sin(\cos\theta)$．

四、自测解答

1解：

(1) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)-\cos(-x)}{\sin(-x)+\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x-\cos x}{-\sin x+\cos x}$,

∴此函数既不是偶函数也不是奇函数．

(2) ∵ $f(-x)=\dfrac{\sin3(-x)}{\cos4(-x)}=-\dfrac{\sin3x}{\cos4x}$,

∴ $f(x)=-f(-x)$，故为奇函数。

(3) ∵ 设 $y=f(x)$，由于

$$f(-x)=1+\cos(-x)-|\mathrm{ctg}(-x)|$$
$$=1+\cos x-|\mathrm{ctg}x|=f(x),$$

∴ $y=1+\cos x-|\mathrm{ctg}x|$是偶函数。

(4) ∵ 设 $y=f(x)=\sin^3x-\sec^2x$，由于

$$f(-x)=\sin^3(-x)-\sec^2(-x)$$
$$=-(\sin^3x+\sec^2x)$$

∴ $y=\sin^3x-\sec^2x$非偶非奇函数。

关于奇偶性的问题，注意概念的应用，及有关的法则正确运用。

2解：

(1) $\begin{cases}3a+2\neq0\\ \left|\dfrac{3-a}{3a+2}\right|\leqslant1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\neq-\dfrac{2}{3}\\ |3-a|\leqslant|3a+2|\end{cases}$

由 $|3-a|\leqslant|3a+2|$，可得 $(3-a)^2\leqslant(3a+2)^2$,

即$8a^2+18a-5\geqslant 0$

解此不等式得：$a\geqslant\frac{1}{4}$，或　$a\leqslant-\frac{5}{2}$。

∴　当$a\leqslant-\frac{5}{2}$　或　$a\geqslant\frac{1}{4}$时，

$$\sin x=\frac{3-a}{3a+2}\text{才能有意义。}$$

(2)　$\begin{cases}2-3a\neq 0\\ \left|\dfrac{5a-2}{2-3a}\right|\leqslant 1\end{cases}$　即$\begin{cases}a\neq\dfrac{2}{3}\\ |5a-2|\leqslant|2-3a|\end{cases}$

由　$|5a-2|\leqslant|2-3a|$　得　$(5a-2)^2\leqslant(2-3a)^2$

$a(2a-1)\leqslant 0$　　∴　$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$。

∴　当$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$\cos x=\frac{5a-2}{2-3a}\text{才能有意义。}$$

确定字母取值范围问题，使函数有意义，要注意三角函数值域概念，结合分式、根式的意义等，利用不等式与不等式组即可解得。

3. 分析：对于这类问题在求解时，关键在于掌握$\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg}x$，$\operatorname{ctg}x$四种三角函数的定义域，并结合分式、根式，对数的意义，灵活运用三角公式即可解得。对于（1）题，因是分式，应考虑分母不为零；对于（2）题因是算术根，应根号内式子大于或等于零；对于（3）题，应考虑对数真数大于零；对于（4）题应分别考虑其定义域，再找出它们的公共部分。