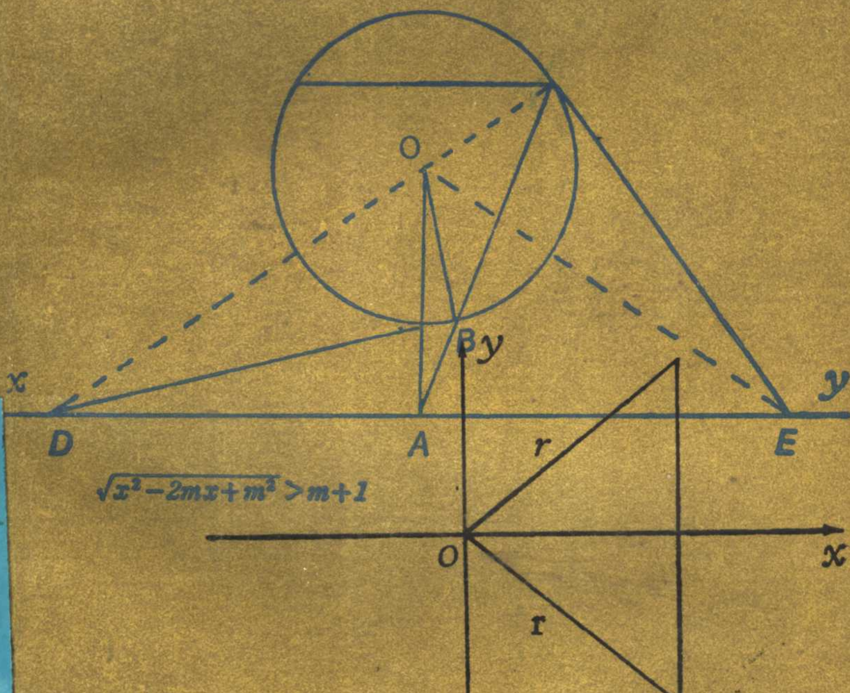
高中

数学精编

立体几何



浙江教育出版社

高中数学精编

立体几何

江焕椋　陶敏之　谢玉兰
丁宗武　许纪传　钱孝华

浙江教育出版社

高中数学精编

立体几何

江焕棣 陶敏之 谢玉兰
丁宗武 许纪传 钱孝华

•

浙江教育出版社出版
(杭州武林路125号)
绍兴市印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092 1/32 印张4.5 字数99,000
1984年11月第1版
1986年3月第2版第3次印刷
印数：116,501—166,800

统一书号：7346·154
定价：0.55元

说　　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》(共四册)，主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便。出版以后印行四次，深受读者欢迎。这次我们吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制高中数学教材，对原书经过一番认真的筛选和修改，改名为《高中数学精编》。

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯和综合运用。与原书比较，在形式上，增加了选择题和填充题等类型题目；在每节习题前增加了“分析与要点”，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己教学的体会，以期对教与学都能有所裨益。亦望以此与同志们共同探讨。

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用。其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习。读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律。

一九八五年一月

目　录

第一章　直线和平面

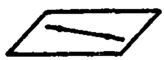
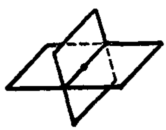
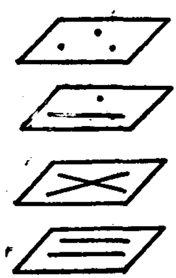
一、平面、空间两条直线

〔分析与要点〕

1　现实的具体的空间图形，若进行数学考察与数学处理，则要纳入逻辑推理的轨道，象平面几何那样，从公理、定义出发，演绎推导．这，就是立体几何学．

学习立体几何，需要有较强的空间想象能力与逻辑思维能力．后者是平面几何学习能力的继续；前者则是新的要求．

2　三个公理和公理 3 的三个推论，是立体几何的理论基础，其作用如下：

名　　称	图　　形	作　　用
公　理　1		证明直线在平面内
公　理　2		证明两平面相交、三点共线、点在直线上
公　理　3 及三个推论		确定平面的依据，证明两平面重合

3　异面直线及有关的概念是本节的重点和难点．在具体应用时，必须严格地从定义出发来研究与异面直线有关的问题．

对于两条异面直线 a、b：

（1）定义：不同在任何一个平面内的两条直线．它的特性是既不平行也不相交；

（2）证明方法：通常用反证法；

（3）所成的角：在空间任取一点 O，过 O 作 $a' \parallel a$、$b' \parallel b$，则 a'、b' 所夹的锐角（或直角）即是（图 1）．具体解题时，O 点常取在直线 a（或 b）上；

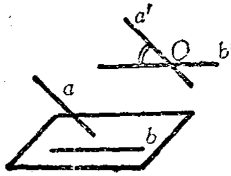


图 1

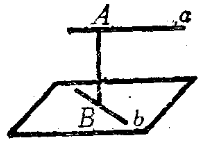


图 2

（4）距离：夹在 a、b 间的公垂线的长度（如图 2）．

4　作为间接证法的一种，反证法是学习立体几何时常采用的一种方法，要求能熟练掌握．在运用反证法时，一定要严格地按照步骤分层次地进行：

第一步，作出和结论相反的假设；

第二步，从假设出发，推导出一个和已知或某一公理、定理、或和某一已获证的命题相抵触的结论．从而得到一对逻辑矛盾；

第三步，推翻假设，肯定题中的结论．

值得一提的是，同一法也甚为重要，对某些问题的证明，

用同一法则更为简便.

（A）

一、选择题（1～10）

1. 已知四点，无三点共线，则可以确定

（A）1个平面； （B）四个平面；

（C）1个平面或四个平面； （D）无法确定.

答：（ ）

2. 三条直线相交于一点，可以确定

（A）1个平面； （B）3个平面；

（C）6个平面； （D）1个或3个平面.

答：（ ）

3. 一条直线和这条直线外的、不在同一直线上的三点所确定的平面个数为

（A）1个； （B）3个； （C）4个；

（D）以上答案都不对.

答：（ ）

4. 两条异面直线指的是

（A）不同在任何一个平面内的两条直线；

（B）在空间内不相交的两条直线；

（C）分别位于两个不同平面内的两条直线；

（D）某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线.

答：（ ）

5. 正方体的一条对角线与正方体的棱可以组成多少对异面直线？

（A）2对； （B）3对； （C）6对；

（D）12对.

答：(　　)

6. 不重合的两条直线 a、b 与直线 l 都相交成 θ 角，则 a、b 的位置关系是

(A) 平行；　　(B) 平行或相交；

(C) 异面或平行或相交；　　(D) 异面.

答：(　　)

7. 不重合的两条直线 a、b 与直线 l 都成异面直线，则 a、b 的位置关系是

(A) 平行或相交或异面；　　(B) 平行；

(C) 相交或平行；　　(D) 异面.

答：(　　)

8. 分别和两条异面直线相交的两条直线的位置关系是

(A) 异面；　(B) 垂直；　(C) 平行；

(D) 异面或相交.

答：(　　)

9. 在空间中，下列哪个命题是正确的

(A) 若两条直线和第三条直线成等角，则这两条直线必平行；

(B) 若两条直线都和第三条直线垂直，则这两条直线必平行；

(C) 若两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线必平行；

(D) 和两条异面直线都垂直的直线叫这两条异面直线的公垂线.

答：(　　)

10. A 为两异面直线 a、b 外的一点，过 A 与 a、b 都平行的平面

(A) 只有一个；　　(B) 恰有两个；

（C）或者没有，或者只有一个；

（D）有无数个.

答：（　　）

二、填空题（11～20）

11. 两个平面把空间分成____部分，三个平面把空间分成____部分.

12. 空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 上的点. 已知 EF 和 HG 相交于 Q，则 EF、HG、AC 三直线必定____.

13. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 M、N、P、Q、R、S 是图中各棱的中点（图 3）.

试判断下列直线的位置关系：

(1) PQ 和 RS 是____；

(2) MN 和 RS 是____；

(3) PQ 和 MN 是____.

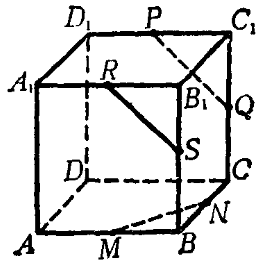


图 3

14. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，与棱 AA_1 异面的棱有____条；与 AA_1 异面的面上对角线有____条.

15. 如图 4，正方体的棱长为 a，则

(1) BA_1 与 CC_1 所成的角为____度，A_1D 与 BC_1 所成角为____度；

(2) 异面直线 BC 和 AA_1 的距离是____，线段 BD_1 的长度是____；

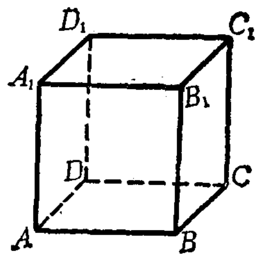


图 4

16. 已知空间四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 的中点分别是 M、N，那

么 MN 的长度必定小于____.

17. 两直线 a、b 异面，若将 a 作平行移动，则 a、b 的位置关系是____；两直线 $a \parallel b$，若将 a 作平行移动，则 a、b 的位置关系是____；两直线 a、b 相交，若将 a 作平行移动，则 a、b 的位置关系是____.

18. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，过上、下底面的两条对角线 AC、A_1C_1 的截面的面积为____；棱 A_1B_1、B_1B、B_1C_1 的中点分别为 M、N、P，过 M、N、P 截面的面积是____.

19. 长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中（图 5），已知 $\angle BAB_1=\angle B_1A_1C_1=30°$. 则 AB 与 A_1C_1 所成角为____；AA_1 与 B_1C 所成角为____，AB_1 与 A_1C_1 所成角的余弦值为____.

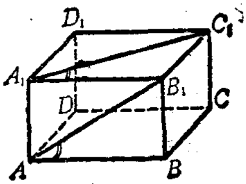


图 5

20. (1) 四面体 $ABCD$ 中（图 6），E、F、G、H、P、Q 分别是棱 AB、BC、CD、DA、AC、BD 的中点. 则 EG、FH、PQ 必相交于____；若 $AB \perp CD$，$AC \perp BD$，则 EG、FH、PQ 的长必定____；

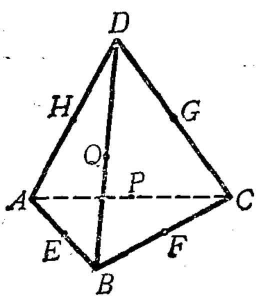


图 6

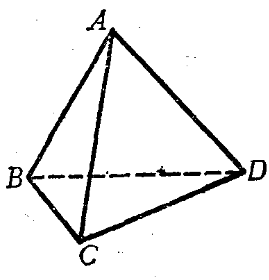


图 7

(2) $ABCD$ 是棱长为 a 的正四面体（四个面是全等的正三角形）（图 7），异面直线 AB、CD 的距离为____。

三、基本技能训练题（21～29）

21．(1) 画出下列图形：①平面 α，②直线 a 在平面 α 内，③直线 a 与平面 α 相交于 A 点，④平面 α 与平面 β 相交于直线 AB；

(2) 下列各图画得正确吗（图 8）？请将错误的地方改正过来：①直线 a 在平面 α 内，②平面 α 与 β 相交，③平面 α 内的两条直线 a、b 互相垂直，④平面 α 与 β 有公共点 A。

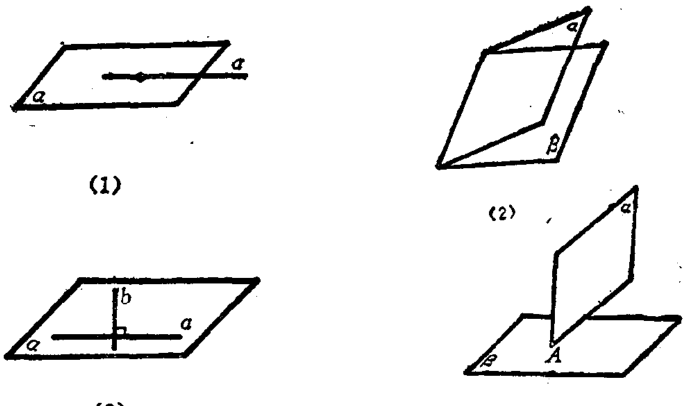


图 8

22．如图 9，指出下面表示点 A、P，直线 a、b，平面 α、β 间位置关系的符号和语句是否正确，并说明理由，然后将错误的地方加以改正：

(1) $A\subset a$；(2) $a\in\alpha$；(3) A 在 α 上；(4) a 过 α；(5) a 在 α 上；

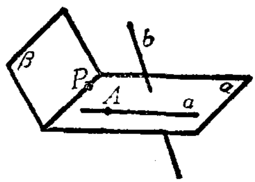


图 9

(6) a 与 α 重合；(7) b 与 α 异面；(8) 平面 α 与平面 β 相交于点 P。

23. 两相交平面 α、β 分别由下列各组条件所确定，画出表示它们位置关系的直观图：

(1) α 过两相交直线 a、b，β 过 a 和 a 外的点 A；

(2) α 过两平行直线 a、b，β 过 b 及 b 外的点 B；

(3) α 过直线 a 及 a 外一点 P，β 过 a 及 a 外的一点 Q；

(4) α 过两相交直线 a、b，β 过两相交直线 a、c；

(5) α 过两相交直线 a、b，β 过两平行直线 b、c。

24. (1) $AB \parallel CD$，$AB \cap \alpha = E$，$CD \cap \alpha = F$（图10），画出 AD 与平面 α 的交点；

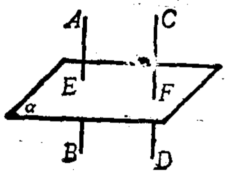


图10

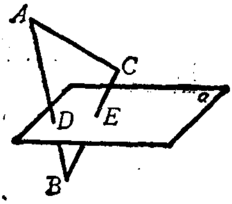


图11

(2) 已知 $\triangle ABC$，$AB \cap \alpha = D$，$BC \cap \alpha = E$（图11），画出直线 AC 与平面 α 的交点；

(3) 空间四边形 $ABCD$，E、F、G 分别在 AB、AD、BC 上，且 EF 不平行平面 BCD(图12)．画出平面 EFG 和 CD 的交点；

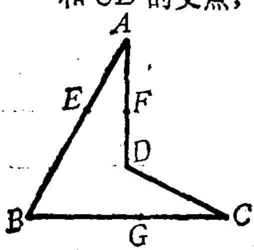


图12

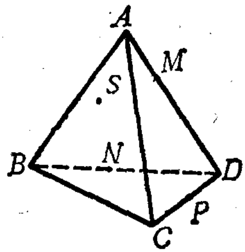


图13

(4) 四面体 $A—BCD$，点 M、N、P 分别在棱 AD、BD、CD 上，点 S 在面 ABC 内(图13)．画出线段 SD 与过 M、N、P 的截面的交点 Q．

〔注意〕 对公理2(如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线)可进一步作如下理解：

(1) 如果两个平面有两个公共点 A、B，那么直线 AB 就是它们的交线；

(2) 如果两个平面有三个或更多的公共点，那么这些点共线(都在交线上)；

(3) 如果两个平面相交于直线 l，且点 P 是这两个平面的公共点，则点 P 在交线 l 上．

25．按斜二测画法，画出下列各图(图14)水平放置的直观图：

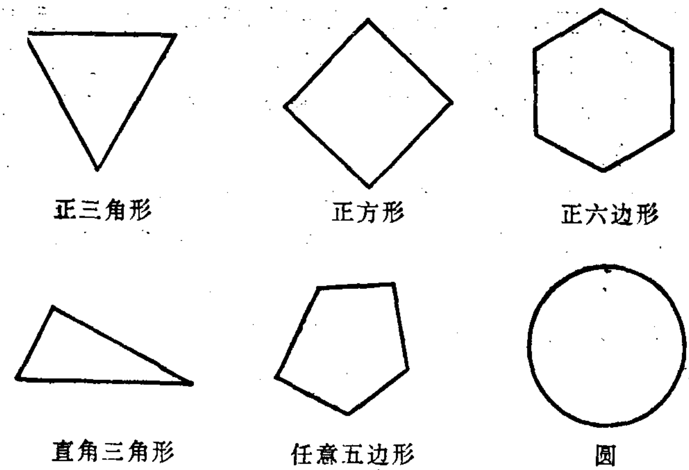


图14

26．已知点 A 是异面直线 a、b 外的一点，平面 α 过 a 与 A，平面 β 过 b 与 A，画出图形．

27．判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 空间中两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

(2) 空间中两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

(3) 两边分别平行的两个角相等．

28．已知平面 α、β 相交于直线 a，直线 b 在 α 内与直线 a 交于 A 点，直线 c 在 β 内与直线 a 平行（图15）．

求证：b、c 异面．

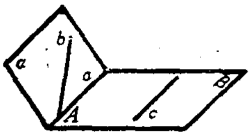


图15

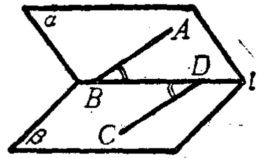


图16

29．已知直线 AB、CD 分别在两相交平面 α、β 内，且与 α、β 的交线 l 相交于 B、D 两点（图16）．若 $\angle ABD=\angle CDB$，问 AB 和 CD 的位置关系如何？并证明你的结论．

〔**注意**〕 证明两条直线异面，通常采用反证法．例如：要证明直线 AB、CD 异面，首先可假设 AB、CD 不异面，则 AB、CD 共面于 α，……也可作如下假设：假设 AB、CD 不异面，则 $AB /\!/ CD$ 或 AB、CD 相交．若 $AB /\!/ CD$，则……，若 AB、CD 相交，则……．必须指出，后一方法往往不如前一方法优越．

（B）

30．O_1 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面的中心，过 D_1、B_1、A 作一个截面（图17）．

求证：这截面与对角线 A_1C 的交点 P 一定在 AO_1 上.

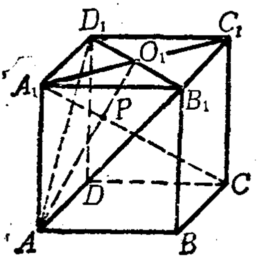


图17

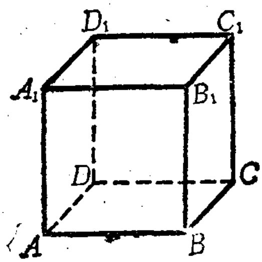


图18

31. (1) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中（图18），分别画出过 A、C、D_1 三点的截面图形和过两棱 BB_1、DD_1 的截面图形，并画出它们的交线；

(2) P、Q 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1、CC_1 上的点（图19）. ①分别画出直线 BP、BQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交点，②画出平面 BPQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线，③画出过 B、P、Q 三点的截面；

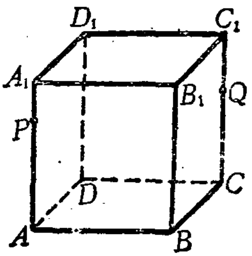


图19

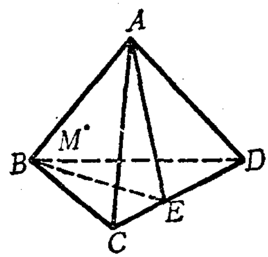


图20

(3) 四面体 $ABCD$（图20），点 E 在 CD 上，点 M 在侧面 ABC 上，画出 DM 与截面 ABE 的交点.

32. 已知 M、N、P、Q 分别是正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的

棱 DD'、BC、AB、$A'D'$的中点，E是侧棱 CC' 的延长线上的点（图21）．根据下列要求，分别画出正方体的截面图形：

(1) 过 AC 与点M；

(2) 过 D'、N、P 三点；

(3) 过 B、D、E 三点；

(4) 过 M、N、P 三点；

(5) 过 E、N、Q三点．

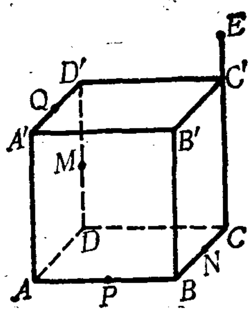


图21

〔注意〕 画多面体的截面，实际上就是要在已知的多面体上，根据确定平面的条件，画出截平面与多面体有关面的交线问题．其关键则是如何找到截平面与多面体各有关的棱（或其延长线）的交点．画法一般可分为两类：①由“不共线的三点”或可转化为“不共线的三点”的条件所确定；②由“可转化为两条相交直线”的条件所确定．

33．(1) 求证：如果一条直线与三条平行直线都相交，则这四条直线在同一平面内；

(2) 如果将三条平行直线换成一组平行直线，上述命题是否成立？

〔注意〕 证明平面图形通常有两种方法：

(1) 先作一个平面，再证明有关的点和线在这个平面内；

(2) 分别过某些点和线作多个平面，再证明这些平面重合。

如33题(1)，设其四条直线分别是 a、b、c、l，则可过 b、l 作平面 α，再证明 $a\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，也可过 a、b 作平面 α，过 b、c 作平面 β，再证 α、β 重合．

34．下列命题是否正确？若不正确，试举反例；若正确，试