中学各科基础知识与能力训练丛书

高中数学

胡炯涛　主编

开明出版社

目　　录

第一章　函　数……………………………………………1
一、基础知识……………………………………………1
二、函数值域的求法……………………………………8
三、函数值的大小比较…………………………………9
四、最大值与最小值……………………………………13
五、函数图象……………………………………………16
综合自测题一……………………………………………19
第二章　方程与不等式…………………………………24
一、基础知识……………………………………………24
二、方程与不等式的解法………………………………30
三、不等式的证明………………………………………37
四、含参数的方程与不等式的讨论……………………49
综合自测题二……………………………………………58
第三章　三角函数………………………………………61
一、基础知识……………………………………………61
二、单位圆与函数线……………………………………67
三、三角函数值的求法…………………………………69
四、三角变换……………………………………………75
五、三角函数的图象与性质……………………………84
六、三角函数的最大值与最小值………………………88

综合自测题三……………………………………………………92
第四章　反三角函数与三角方程………………………………97
一、基础知识………………………………………………97
二、反三角函数的图象与性质…………………………101
三、反三角函数的求值与证明…………………………105
四、简单三角方程的几种解法…………………………110
五、三角不等式……………………………………………117
六、三角函数的应用………………………………………121
综合自测题四………………………………………………126
第五章　数列与极限…………………………………………131
一、基础知识………………………………………………131
二、数列求和法……………………………………………137
三、数列的极限……………………………………………140
四、数列极限的应用………………………………………147
五、递推数列………………………………………………151
综合自测题五………………………………………………164
第六章　复　数………………………………………………168
一、基础知识………………………………………………168
二、复数的模与共轭复数的应用…………………………180
三、"两边取"法则…………………………………………184
四、复数取为实数的条件…………………………………186
五、1的三次虚根 ω 及其应用 ……………………190
六、复数的绝对值不等式及其应用………………………194
七、辐角及其主值的求法…………………………………196
八、复数的几何意义及其应用……………………………200
综合自测题六………………………………………………204

第七章　排列、组合、二项式定理…………………… 208
一、基础知识…………………………………… 208
二、排列与组合的基本方法…………………… 213
三、排列与组合的应用题……………………… 217
四、二项展开式的通项及其应用……………… 225
五、二项展开式系数的性质…………………… 230
六、二项式定理的应用………………………… 232
综合自测题七…………………………………… 235
第八章　直线和平面………………………………… 239
一、基础知识…………………………………… 239
二、点、线与面的共属问题…………………… 242
三、异面直线…………………………………… 245
四、三垂线定理及其应用……………………… 250
五、平面与平面的垂直………………………… 257
六、二面角与折叠形…………………………… 259
七、同一法……………………………………… 266
综合自测题八…………………………………… 268
第九章　多面体和旋转体…………………………… 272
一、基础知识…………………………………… 272
二、多面体的计算与证明……………………… 276
三、旋转体的计算与证明……………………… 282
四、多面体和旋转体的体积…………………… 290
综合自测题九…………………………………… 301
第十章　直　线……………………………………… 304
一、基础知识…………………………………… 304
二、定比分点公式的应用……………………… 307

三、直线方程及其求法…………………………………… 312
四、两直线的位置关系…………………………………… 319
综合自测题十…………………………………………… 328
第十一章 圆锥曲线……………………………………… 332
一、基础知识…………………………………………… 332
二、圆和圆系方程……………………………………… 345
三、圆锥曲线方程的求法……………………………… 351
四 渐近线、准线、离心率和焦半径………………… 358
五、用圆锥曲线的定义解题…………………………… 367
六、与圆锥曲线有关的计算与证明…………………… 375
七、用平移化简方程…………………………………… 383
综合自测题十一………………………………………… 389
第十二章 参数方程、极坐标………………………… 397
一、基础知识…………………………………………… 397
二、曲线的参数方程…………………………………… 401
三、直线的参数方程及其应用………………………… 404
四、圆锥曲线的参数方程……………………………… 408
五、如何求轨迹的方程………………………………… 413
六、如何选择参数……………………………………… 418
七、曲线的极坐标方程………………………………… 425
八、圆锥曲线的统一方程……………………………… 428
综合自测题十二………………………………………… 435
第十三章 数学归纳法与数学证明…………………… 440
一、数学归纳法………………………………………… 440
二、如何做证明题……………………………………… 460
综合自测题十三………………………………………… 467

模拟试题一…………………………………………………… 468
模拟试题二…………………………………………………… 472
习题解答…………………………………………………………… 478

第一章　函　　数

一、基础知识

1．子集与空集

若A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的真子集，记作$A \subset B$．空集是任何非空集合的真子集．

不要把数0或集合$\{0\}$与空集相混淆，不要把空集错以为$\{$空集$\}$或$\{\phi\}$．

例 1　下列说法中正确的是：

（A）任何一个子集A必有两个子集．

（B）任何一个集合A必有一个真子集．

（C）A为任一集合，它与B的交集是空集，则A、B中至少有一个是空集．

（D）若集合A与B的交集是全集，则A、B都是全集．

解　若A是ϕ，命题就不成立，（A）不真．

若A是ϕ，就没有真子集，（B）不真．

若A非空，B非空，它们的交集可以是ϕ，（C）不真．

若A、B中有一个非全集，则$A \cap B$不可能是全集，所以命题（D）正确．

例 2　若A、B为非空集合，且$A \subset B$，I为全集．问$A \cap \bar{B}$是什么集合？

解　如图所示，易知

$$A\cap\overline{B}=\phi$$

2．函数的定义

一个函数是由定义域与对应规律“f”所确定的．若两个函数的定义域不同，则尽管它们有共同的对应规律“f”，也还是两个不同的函数．

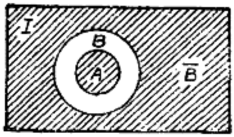

图 1-1

例 3　以下各组中，表示相同函数的是：

(A)　$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $\varphi(x)=x-1$．

(B)　$f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$．

(C)　$f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$．

(D)　$f(x)=\log_a x^2$ 与 $\varphi(x)=2\log_a x$．

解　(A)、(B)、(D) 虽能化为相同的解析式，但由于定义域不同，都属于不同的函数．仅(C)组属相同函数．

例 4　若 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$．

解　只需把右式的自变量统一成“$\sqrt{x}+1$”即可．由于 $x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$，所以 $f(x)=x^2-1$．

由此可知，变量并非确定函数的要素．

例 5　若 $f(x)=\sqrt{\pi}$，求 $f(x^2)$．

解　这是常函数，$f(x^2)=\sqrt{\pi}$．

例 6　已知函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$，试求函数 $y=f(a+x)+f(a-x)$　$(0<a\leqslant1)$的定义域．

解　定义域是指“f”对应下括号内自变量的取值范围．所以

$$\begin{cases} 0\leqslant a+x\leqslant 1 \\ 0\leqslant a-x\leqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -a\leqslant x\leqslant 1-a & ① \\ -1+a\leqslant x\leqslant a & ② \end{cases}$$

①、②是两个“区间套”，求定义域也就是求两者的公共部分．易知，当 $a=\frac{1}{2}$时,①、②相同．随着 a 的增加，①向左移，②向右移，直至不相交．

据上述，取 $a=\frac{1}{2}$为分界点，划分区间，求交集得定义域：

$$\begin{cases} a=1\text{ 时，} x=0. \\ \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1\text{ 时，} x\in[a-1,\ 1-a]. \\ 0<a<\frac{1}{2}\text{时，} x\in[-a,\ a]. \end{cases}$$

3．反函数

函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域、定义域．这也是求函数的定义域、值域的一种方法．

反函数的求法是：

(1) 由 $y=f(x)$中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 把 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$.

函数$y=f(x)$和反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称．

单调函数 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$也是单调函数，两者在定义域内的增减性一致．

例 7 求函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数．

解 平方得表达式$y^2=x-1$，注意到$y=-\sqrt{x-1}$中

有 $x\geqslant1$，$y\leqslant0$，因此反函数为 $y=x^2+1(x\leqslant0)$. 反函数中定义域的确定是不可忽视的.

例 8 求函数 $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$的值域.

解 函数的定义域为 $x\geqslant0$，且 $x\neq1$，改写解析式为 $\sqrt{x}=\dfrac{y-1}{y+1}\geqslant0$，所以$y\geqslant1$ 或$y<-1$，此即为所求值域.

方法：据 x 的范围求得 y 的取值范围.

4. 函数的性质

奇函数与偶函数的图形都是对称图形.

关于复合函数的增减性有如下结论：设 $y=f(u)$，$u=g(x)$都是单调函数，则复合函数$y=f[g(x)]$在其定义域内也是单调函数. 且若 $y=f(u)$为增函数，则 $y=f[g(x)]$的增减性与$u=g(x)$的增减性相同；若 $y=f(u)$为减函数，则 $y=f[g(x)]$的增减性与 $u=g(x)$的增减性相反.

例 9 判定 $f(x)=\dfrac{2x-17}{15-x}$的奇偶性.

解 $f(x)$的定义域为 $x\neq15$ 的一切实数，即知其图象不具对称性，故 $f(x)$为非奇非偶函数.

例 10 设$f(x)$是R上的奇函数，且当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，求当$x\in(-\infty,0)$时$f(x)$的表达式.

解 这是分段函数奇偶性的讨论.

当$x\in(-\infty,0)$时，所求的函数$f(x)$应满足：

$$f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{x}),$$

即 $$f(-x)=(-x)(1-\sqrt[3]{(-x)})$$

所以 $$f(x)=x(1-\sqrt[3]{x}).$$

例 11 求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-3)$ 的递减区间.

解 设 $u=x^2+2x-3$，由于 $\log_{\frac{1}{2}}u$ 为减函数，所以所求的递减区间即为 $u=x^2+2x-3$ 的递增区间 $x>-1$. 但是还需满足 $x^2+2x-3>0$，故函数的递减区间是 $(1,+\infty)$.

例 12 $f(x)$ 是以 $T=5$ 为周期的周期函数，若已知当 $|x|\leqslant 2$ 时 $f(x)=-2x$，求：$f(-16.5)$.

解 据条件知 $f(x+5)=f(x)$，则 $f(-16.5)=f(-1.5)$，由于 $|-1.5|<2$，所以 $f(-1.5)=-2\times(-1.5)=3$.

5．函数的图象

函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 称为 x 的二次函数. 在二次函数图象(抛物线)中起决定作用的因素是二次项系数 a 及顶点坐标 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，后者决定图象位置，前者表征着图象的开口方向. $\Delta<0$ 时，y 与 a 取同号.

幂函数、指数函数与对数函数的图象是函数值进行大小比较的重要依据.

$y=x^n$(n 是有理数) 叫做幂函数. 它在第一象限内的图象如图右所示($n>0$).

当 $n>1$ 时，以 $y=x^2$ 为例；

当 $n<1$ 时，以 $y=\sqrt{x}$ ($y^2=x$ 的一支)为例.

当 $n<0$ 时，以 $y=\pm\frac{1}{x}$ 为例.

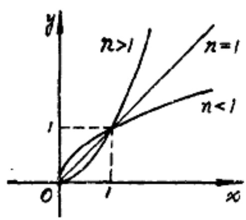

图 1-2

指数函数的图象都过(0,1)点，对数函数的图象都过(1,0)点. 两个函数的有关性质可以在图象上清晰地看出.

例 13 若对于函数 $f(x)=(5-p)x^2-6x+p+5$ 当 $x\geq 0$ 时 $f(x)$恒为正，求 p 值所取范围.

解 图示情况符合题意.

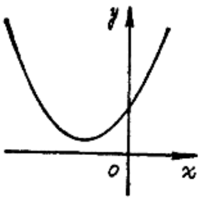

图 1-3

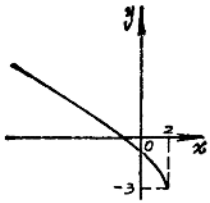

图 1-4

因此 $\begin{cases} 5-p>0 \\ \Delta=b^2-4ac<0, \end{cases}$

即 $-4<p<4$.

例 14 试作函数 $y=-3+2\sqrt{2-x}$ 的略图.

解 此函数图象由 $y=2\sqrt{-x}$ 的图象平移而得. 而 $y=2\sqrt{-x}$ 是 $y^2=-4x(y\geq 0)$的上半支，顶点为$(2,-3)$. 图象与 x 轴的交点为 $(-1/4,0)$，与 y 轴的交点为 $(0,3+2\sqrt{2})$,即成略图.

例 15 函数$y=ax+b$和 $y=ax^2+bx+c$，它们可能的图象是：

解 这是一道常见题，但却是道错题.

(A)、(B) 中两个 a 异号，可予排除.

(C) 中二次函数图象的顶点横坐标 $x_0=-\dfrac{b}{2a}>0$, a、b 异号. 但直线 $y=ax+b$ 中 a、b 同号，也予排除.

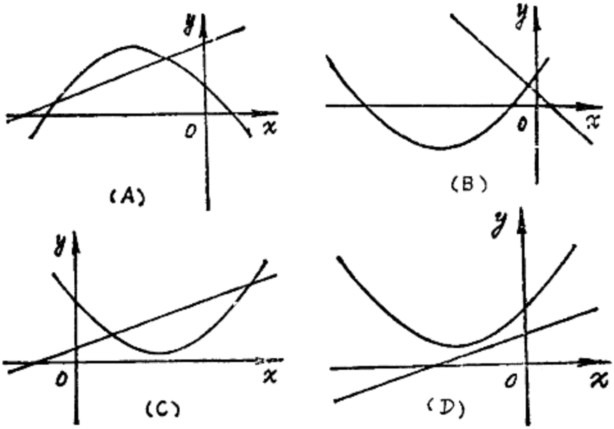

图 1-5

看来似乎非(D)莫属，但作下定量分析就看出问题了.

直线与 x 轴的交点为$\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$，但把$\left(-\dfrac{b}{a}\right)$代入二次函数得 $y=c$. 这跟抛物线和 y 轴的交点不一致.

正确的选择应改(D)为右图.

同名函数的大小比较，可以根据图象及其性质来完成.

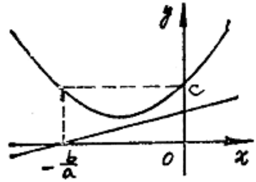

图 1-6

例 16 试比较$\left(\dfrac{6}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$，$\left(\dfrac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{4}{3}$的大小.

解 据图象即知 $\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{3}<0$，而指数幂是正的．

由于 $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$ 与 $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ 的底数不同，可看作幂函数值进行比较．这里 x^2 中 $\alpha=-\frac{2}{3}>0$．

所以 $\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{3}<\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$，

反之，若指数不相同，则可看作两个同底指数函数值的大小比较．

二、函数值域的求法

函数值域的一般求法有：观察法(直接从观察式子得到，或据定义域确定之)；配方法，求反函数的定义域以确定原函数的值域．

例 1 求下列函数的值域：

(1) $y=\lg(1-2\cos x)$； (2) $y=\frac{5-2x}{x-3}$．

解 (1) 因 $0<1-2\cos x\leqslant 3$，故 $y\leqslant\lg 3$．函数的值域是 $y\in(-\infty,\lg 3]$．

(2) $y=\frac{5-2x}{x-3}=-\frac{1}{x-3}-2$，所以 $y\neq-2$ 为其值域，这里用到"部分分式"来改写 y 的解析式，使之能观察得结果．

例 2 求函数 $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$的值域.

解 分子、分母中 x 的最高次数都是二次，再用“部分分式”，得 $y=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$，由于 $(x\pm1)^2\geqslant0$，所以$-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant1$. 所以 $0\leqslant y\leqslant2$.

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{-x^2+2x-5}$的值域.

解 分母配方成$-(x-1)^2-4\leqslant-4$，所以值域是$-\dfrac{1}{4}\leqslant y\leqslant0$.

例 4 求函数 $y=\sqrt{1-x}-x$ 的值域.

解 采用配方法，得 $y=\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\geqslant-1$.

还可观察知，$y=\sqrt{1-x}-x$ 中 $x\leqslant1$，$-x\geqslant-1$，而$\sqrt{1-x}\geqslant0$，所以 $y\geqslant-1$.

例 5 求函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$的值域.

解 求得$x^2=\dfrac{1-y}{1+y}\geqslant0$，则 y 的取值范围是$-1<y\leqslant1$（值域）.

三、函数值的大小比较

数与式大小比较的主要依据是函数图象、不等式的性质和各类函数的性质.

大小比较的基本方法是：$A\vee B\Longleftrightarrow A-B\vee0$（“$\vee$”表

示“大于或小于”)．这个方法称为差值比较法．

比较的一般步骤是：作差式—差式变形（因式分解、配方、通分、公式变换等)——符号判断（大于或小于0)．

在幂、指函数中还可采用商值比较法，其步骤是：

若 $b>0$，则 $a>b\Longleftrightarrow\frac{a}{b}>1$；$a<b\Longleftrightarrow\frac{a}{b}<1$．则可由求商——变形——符号判断（大于或小于1）作出比较．

例 1 设 $1>2a>0$，试确定 $A=1-a^2$，$B=1+a^2$，$C=\frac{1}{1-a}$，$D=\frac{1}{1+a}$的大小顺序．

解 因 $1>2a>0$，则 $\frac{1}{2}>a>0$，A、B、C、D 全正．

显然 $A<B$，$C>D$．只需比较 C、B 及 A、D．

作差式 $C-B=\frac{1}{1-a}-(1+a^2)=\frac{a}{1-a}(1-a+a^2)$，

但 $a>0$，$1-a>0$，所以 $C-B=\frac{a}{1-a}(1-a+a^2)$的符号决定于 $1-a+a^2$，由于 $1-a+a^2$ 恒正，故 $C-B>0$，$C>B$．

又
$$A-D=1-a^2-\frac{1}{1+a}=\frac{a}{1+a}(1-a-a^2)$$
$$=\frac{a}{1+a}\left[\frac{5}{4}-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

由 $\frac{1}{2}>a>0$ 知 $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2<1$，故 $A-D>0$，$A>D$．

总之，得$C>B>A>D$.

例 2 比较$\log_a(m^2-1)$与$\log_a(m-1)(a>0,\ a\neq1,\ m>1)$的大小.

解 作差式$\log_a(m^2-1)-\log_a(m-1)=\log_a(m+1)$.

当$a>1$时，$m+1>1$，$\log_a(m+1)>0$，

即$\log_a(m^2-1)>\log_a(m-1)$；

当$0<a<1$时，$m+1>1$，$\log_a(m+1)<0$，

即$\log_a(m^2-1)<\log_a(m-1)$.

当指数幂与对数绝对值进行大小比较时，常采用商值比较法.

例 3 设$a>b>0$，试比较a^ab^b与a^bb^a的大小.

解 考虑比式$\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$，

因$a>b>0$，则$\dfrac{a}{b}>1$，而$a-b>0$，由指数函数图象即可判定$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，即$a^ab^b>a^bb^a$.

例 4 设$0<x<1$，$a>0$，$a\neq1$. 试比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

解 用商值比较法.

$$
\begin{aligned}
\text{设}A&=\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|\\
&=|\log_{1+x}(1-x)|\\
&=-\log_{1+x}(1-x)\ (\text{因 }0<1-x<1)\\
&=\log_{1+x}\frac{1}{1-x}=\log_{1+x}\frac{1+x}{1-x^2}\\
&=\log_{1+x}(1+x)-\log_{1+x}(1-x^2)\\
&=1+[-\log_{1+x}(1-x^2)]
\end{aligned}
$$