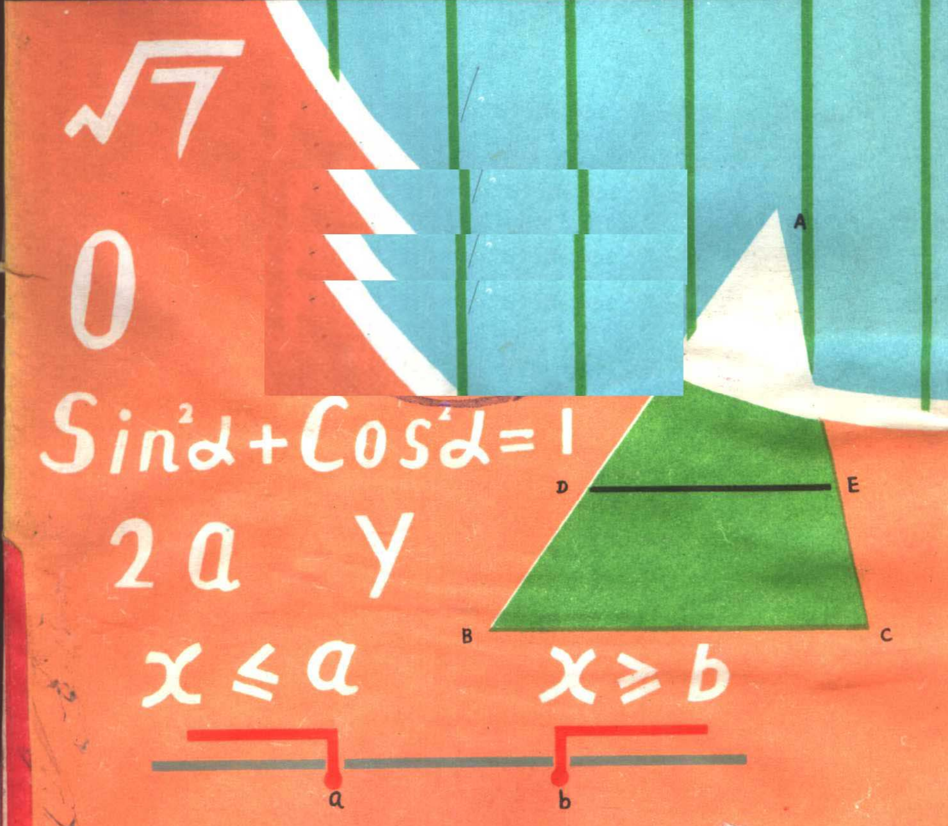
初中数学复习



科学普及出版社广州分社

初中数学复习

科学普及出版社广州分社

[redacted]中[redacted]习

黎赐锦 何[redacted]涛 [redacted] 编
蔡兴澄 刘国[redacted]安

科学普及出版社广州分社出版

广州市教育北路大华街兴平里2号

广东省粤北印刷厂印刷

广东省新华书店发行

开本：787×1092毫米1/32 印张：6.75 字数：146千字

1982年5月第1版 1982年5月第1次印刷

印数：124500册 统一书号7051·60109

定价：0.70元

编 者 的 话

初中学生在毕业前要按照中学数学大纲的要求，进行一次全面系统的数学复习。这对于升学和参加生产劳动都是完全必要的。

本书是根据《全日制十年制中学数学教学大纲》的要求和全国统编教材的内容编写的，全书分为数、代数式、方程、不等式、指数与对数、函数、平面几何、三角、平面解析几何等九章。每章内容都系统地总结该部分的知识；例题着重训练学生如何根据题意进行思考、分析、解题。

本书由黎赐锦、何嘉仁、郭锡涛、邓克和、蔡兴滢、刘国治、唐超文、邱智安等同志合编。由于我们的水平有限，在掌握内容的深广度方面仍有不足之处，因此，教师在使用本书时，必须从学生的实际情况出发，选择其中合适的材料，或作相应的补充；也期望读者对本书提出宝贵的意见。

本书的编写得到一些师生的热情帮助和支持，在此一道表示感谢。

编 者

一九八二年二月

目　　录

第一章　数

一　数系表

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数（正负分数）}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数（正负无理数）——无限不循环小数}\end{cases}$$

二　数轴

规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴。

实数与数轴上的点是一一对应的。即任一实数都有数轴上确定的一个点与之对应，反之，数轴上的任一点也有确定的一个实数与之对应。

三　实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases}a & \text{当}\ a\geqslant 0\ \text{时}\\ -a & \text{当}\ a<0\ \text{时}\end{cases}$$

实数的绝对值的几何意义：表示这个实数所对应的点与原点的距离。

四　实数的大小比较

数轴上的点越往右，它所表示的数就越大。就是说，一切正数大于零；零大于一切负数；两个负数，绝对值较大的

反而小，绝对值较小的反而大。

五 实数的运算

1．四则运算法则

运算＼法则＼原数	同号		异号	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加	保持原号	相加	同绝对值较大者	相减
减	减去一个数等于加上这个数的相反数			
乘	正	相乘	负	相乘
除	正	相除	负	相除

2．运算定律

（1）交换律　$a+b=b+a$　　$a\cdot b=b\cdot a$

（2）结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

（3）分配律　$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

3．运算顺序

先乘方、开方，再乘、除，最后加减；同级两种运算按自左至右的顺序进行；如有括号，就先进行小括号，再进行中括号，后进行大括号内的运算。

4．乘方运算

定义：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots\cdot a}_{n个a}$　　（n为正整数）

其中 a 叫底数，n 叫指数，a^n 叫 a 的 n 次幂。

例 1　计算 $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div 5$

$+\frac{3}{7}\div(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

解　原式 $=\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{10}+\left(-\frac{3}{14}\right)+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}$

$+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}$

$=\frac{5}{10}-\frac{3}{8}-\frac{7}{14}=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$

〔说明〕1. 在熟练之后有些步骤可以省略。

2. 把分母有倍数关系的分数先合并。

例 2　计算

$$2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right]$$

解　原式 $=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-4\frac{2}{3}$

$=\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right)$

$=3\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}=-1\frac{7}{8}$

〔说明〕1. 算式中若有分数、小数，一般把小数化成分数。

2. 最后做加法时，有时可先把正项加在一起，把负项也加在一起再做减法。

例 3　计算 $-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

解　原式 $=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{10}{14}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$=-\frac{3\times4\times1\times7\times10\times3}{2\times3\times5\times4\times14\times5}=-\frac{3}{10}$$

〔说明〕1.乘除混合运算时先化成连乘积。

2.若有带分数，一般把其化成假分数。

3.最后的符号由乘数中负数的个数决定。有偶数个负数时积为正，有奇数个负数时积为负。

例4　计算$-2^2+(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3$

解　原式$=-4+4-9+27=18$

〔说明〕要防止出：$-2^2=(-2)^2$、$-(-3)^2=+3^2$的错误。

例5　求(1)　$a\cdot|a|$　　　　(2)　$a-|a|$。

解　(1)　$a\cdot|a|=\begin{cases}a^2 & 当a>0时\\ 0 & 当a=0时\\ -a^2 & 当a<0时\end{cases}$

(2)$a-|a|=\begin{cases}0 & 当a\geqslant0时\\ 2a & 当a<0时\end{cases}$

例6　已知$|2a|+|b+1|=0$，求$a^{10}+b^{10}$

解　$\because$　$|2a|\geqslant0$，$|b+1|\geqslant0$，$|2a|+|b+1|=0$

$\therefore$　$|2a|=0$，$|b+1|=0$　$\therefore$　$2a=0$，$b+1=0$

从而有　$a=0$，$b=-1$

$\therefore$　$a^{10}+b^{10}=0^{10}+(-1)^{10}=1$

习　　题

1　写出下列各数的相反数、倒数、相反数的倒数、倒数的相反数：$\frac{3}{4}$、$-\frac{4}{3}$、1、0、-6、5。

〔$-\frac{3}{4}$、$\frac{4}{3}$、$-\frac{4}{3}$、$-\frac{4}{3}$；$\frac{4}{3}$、$-\frac{3}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{3}{4}$；-1、1、

-1、-1；0、不存在、不存在、不存在；

6、$-\frac{1}{6}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{6}$；-5、$\frac{1}{5}$、$-\frac{1}{5}$、$-\frac{1}{5}$〕

2　已知$a^2<a$，a是什么数。　〔$0<a<1$〕

3　已知$-a<a$，a是什么数。　〔$a>0$〕

4　已知$\frac{1}{a}<a$，a是什么数。

〔$a>1$或$-1<a<0$〕

5　满足什么条件时，下面的式子成立。

(1)　$|a|=-a$、$|a|=|-a|$、$|-a|=-|a|$

(2)　$-(-a)=-a$　　(3)　$|a+b|=|a|+|b|$

(4)　$|a-b|=|a|-|b|$　　(5)　$|ab|=ab$

(6)　$\frac{a}{b}<1$。

6　求(1)　$a+|a|$　　$\begin{cases} 2a & (当a>0时) \\ 0 & (当a\leqslant 0时) \end{cases}$

(2)　$\frac{|a|}{a}$　$(a\neq 0)$　　$\begin{cases} 1 & (当a>0时) \\ -1 & (当a<0时) \end{cases}$

7　如果一个数的倒数比它大，这个数是怎样的数？比它小呢？和它相等呢？它的倒数无意义呢？

8　x乘以什么数就得到和它相反的数？x除以什么数就得到和它相反的数？x减去什么数就得到和它相反的数？

9　如果一个数的相反数比它大，这个数是怎样的数？比它小呢？和它相等呢？

10　a一定大于$-a$吗？2a一定大于a吗？为什么？

11　“不论a是什么数值，a^2永远是正值”，这句话对吗？“不论a是什么数值，a^2永远不是负值”，这句话对吗？为什么？

12　说出绝对值小于3.5的所有整数。〔0，±1，±2，±3〕

13　“互为相反数的两个数绝对值相等，符号相反”，这句话对吗？

14　x是什么数值时$\frac{|x|}{x}$的值是1？是-1？

15　如果$|x|=5$，$|x|<5$，$|x|>5$，那么，表示x的点在数轴上的什么地方？

16　检查下列各式是否相等：$-a^2$和$(-a)^2$；$(-a)^3$和$-a^3$；a^2和$(-a)^2$；a^3和$(-a)^3$，其中$a\neq 0$。

17　计算：

(1) $\left(1-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)\div\frac{1}{12}$　〔$4\frac{1}{2}$〕

(2) $3\frac{2}{3}-4\frac{2}{5}-\left(1\frac{2}{7}-0.3-0.1\right)\div\frac{1}{4}$　〔$-\frac{449}{105}$〕

(3) $(-3)^2-\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{9}-6\div\left|-\frac{2}{3}\right|$　〔$\frac{3}{4}$〕

(4) $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|$　〔$-44\frac{1}{2}$〕

(5) $\dfrac{16\div\left(-2\frac{2}{3}\right)^2+\frac{23}{40}\div 2.3}{0.5^3\times(-2)^2\div 2\times(-4)}$　〔$-2\frac{1}{2}$〕

(6) $\dfrac{(0.125\times 8-4\times 0.25)-(-1)^3}{\left[1\frac{1}{5}-0.8-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]\div 15\%}$　〔1〕

第二章 代 数 式

代数式是用运算符号将数和表示数的字母连接而成的式子，它的分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

一 整式

1．有关概念

有理式：只含有加、减、乘（包括乘方）、除这几种运算的代数式。

整式：分母不含有字母的有理式。

单项式：没有加减运算的整式叫单项式；单项式中字母前面的数（包括符号）叫单项式的系数。

多项式：几个单项式的代数和叫多项式；组成多项式的每个单项式叫做多项式的项；多项式中字母及其指数都相同的项叫同类项。

2． 整式的运算

(1) 整式的加减法

去括号：$a+(b+c)=a+b+c$

$$a-(b+c)=a-b-c$$

合并同类项：求出系数的代数和而字母及其指数均不变。

（2） 整式的乘法

幂的运算法则：（m、n为自然数）

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0,\ m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m b^m$$

单项式的乘法：根据乘法交换律与结合律，系数相乘，同底数的幂相乘，例如：

$$(-2a^3b^2c) \cdot \left(-\frac{1}{5}ab^3cd\right) = \frac{2}{5}a^4b^5c^2d;$$

$$(-3x^2y)^2 \cdot (-5x) = 9x^4y^2 \cdot (-5x) = -45x^5y^2.$$

多项式的乘法：根据单项式的乘法法则，按乘法分配律进行，例如：

$$(-4x)(2x^2 - 3x + 1) = -8x^3 + 12x^2 - 4x;$$

$$(a+b)(2a-3b) = 2a^2 + 2ab - 3ab - 3b^2 = 2a^2 - ab - 3b^2.$$

乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

二 因式分解

1．定义：把一多项式化成几个整式的积叫因式分解。因式分解与整式乘法是两种不同的恒等变形，但又有一

定的联系，例如：$a^2-b^2 \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (a+b)(a-b)$

2．方法

（1） 提取公因式法：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$

（2） 公式法：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$。

$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$。

（3）分组分解法：

$ma+mb+na+nb=m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n)$。

（4）分解二次三项式ax^2+bx+c的十字相乘法。若 $a=pq$，$c=rs$，且$b=ps+qr$，即$a<\begin{matrix}p\\q\end{matrix}\times\begin{matrix}r\\s\end{matrix}>c$

$ps+qr=b$

则$ax^2+bx+c=(px+r)(qx+s)$

（5） 求根法

若ax^2+bx+c的两个根分别是x_1与x_2，则

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

例1　分解因式：$4am+3bm-4an-3bn$

解一　$4am+3bm-4an-3bn=4a(m-n)+3b(m-n)$

$=(m-n)(4a+3b)$

解二 $4am+3bm-4an-3bn=m(4a+3b)-n(4a+3b)$

$=(4a+3b)(m-n)$。

例2　分解$p(3p^2-4q)^2-p^5$成因式的形式

解　$p(3p^2-4q)^2-p^5=p[(3p^2-4q)^2-p^4]$

$=p(3p^2-4q+p^2)(3p^2-4q-p^2)$

$=8p(p^2-q)(p^2-2q)$。

〔说明〕多项式的各项有公因式，就先提取公因式。

例 3　分解x^6-y^6成几个因式相乘积的形式

解　$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

例 4　分解因式$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+27c^3$

解　$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3+27c^3=(a-2b)^3+27c^3$

$=(a-2b+3c)[(a-2b)^2-(a-2b)3c+(3c)^2]$

$=(a-2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2-4ab+6bc-3ac)$

说明：本题先把各项分成两组的目的是为了创造应用公式分解因式的条件。

例 5　分解x^3+3x^2-4成因式形式

解　$x^3+3x^2-4=x^3-x^2+4x^2-4$

$=x^2(x-1)+4(x+1)(x-1)$

$=(x-1)(x^2+4x+4)$

$=(x-1)(x+2)^2$

说明：这题是先拆项（拆$3x^2$成$-x^2+4x^2$)再分组，然后各自分解因式，最后再以提取公因式而达到最终分解因式的目的。

例 6　不应用立方和公式分解多项式a^3+b^3

解　$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3$

$=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)$

$=a^2(a+b)-b(a+b)(a-b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

说明：这题利用添项（添上$-a^2b+a^2b$)、分组、连续提取公因式的方法最后达到分解因式的目的。

例 7　分解$(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$

解　$(x-2y)x^3-(y-2x)y^3=x^4-2x^3y-y^4+2xy^3$

$=(x^4-y^4)+(2xy^3-2x^3y)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)+2xy(y^2-x^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)-2xy(x-y)(x+y)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)(x-y)^3$

说明：这题若按原来的分组则无法继续分解下去，所以先把它展开，然后再分组分解。

例8　分解因式$138x^3y^2-8x^5-18xy^4$

解　$138x^3y^2-8x^5-18xy^4=-8x^5+138x^3y^2-18xy^4$

$=-2x(4x^4-69x^2y^2+9y^4)$

$=-2x(4x^4+9y^4+12x^2y^2-81x^2y^2)$

$=-2x[(2x^2+3y^2)^2-(9xy)^2]$

$=-2x(2x^2+3y^2+9xy)(2x^2+3y^2-9xy)$

说明：一般多项式的因式分解的步骤是，首先按某一个字母降幂或升幂排列，之后优先考虑提取公因式，接着按照应用公式、分组分解的次序进行分解（中间有时可能要通过一些数学特殊处理——比如拆项、添项或其它）直至终了为止。

例9　分解因式：x^2-x-1

解　$x^2-x-1=x^2-x+(\frac{1}{2})^2-1-(\frac{1}{2})^2$

$=(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2})^2$

$=(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})$

说明：本题用的是配方法，如用一元二次方程的求根公式将更快得出结果。

例10　证明：$(2a+1)^2-1$在a为整数时必能被8整除。

证明　$\because (2a+1)^2-1=(2a+1+1)(2a+1-1)$

$=2(a+1)2a=4a(a+1)$

又因为a为整数，所以a与(a +1)中必有一个是偶数，所以a(a+1)必能被2整除，从而，4a(a+1)必能被8整除，即$(2a+1)^2-1$必能被8整除。

三　分式

1　定义：分母含有字母的有理式叫分式。与分数一样，分式中分母不能为零。

2　分式的基本性质：

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m},\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}\text{（m是不等于零的代数式）}$$

即分式的分子分母同时乘以或除以不为零的代数式，分式的值不变。由此可得符号法则如下：$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$；$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$；$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$；$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$。由此又可对分式进行约分（约去分子与分母的公因式）和通分（把几个不同分母的分式化成与原来各分式分别相等的、具有相同分母的分式）。

3　分式的运算：

加减法：$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

乘法：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

除法：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

乘方：$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$　　（n为正整数）